Cvičení ke kursu *Neúplnost a Gödelovy věty* (20. dubna 2024)

Cvičení

1. Dokažte, že každá rekurzívní množina je m-převeditelná na každou množinu, která je neprázdná a má neprázdný komplement. Zdůvodněte, že když A je m-převeditelná na $\emptyset$, pak $A = \emptyset$, a když A je m-převeditelná na N, pak $A = \mathrm{N}$.

2. Užijte fakt, že každá rozhodnutelná bezesporná teorie má rozhodnutelné zúplnění, a dokažte, že libovolná teorie T je podstatně nerozhodnutelná, právě když je podstatně neúplná.

3. Nechť $Y \subseteq \mathrm{N}$ je RE nerekurzívní množina. Zdůvodněte, že $X = \{\, 2n\,;\, n \in Y \,\}$ je také RE a nerekurzívní. Uvažujte jazyk $\{0, \mathrm{S}, P\}$, kde P je unární predikát. Nechť T je teorie, jejíž množina axiomů je $\mathsf{SUCC} \cup \{\, P(\overline{n})\,;\, n \in X \,\}$. Nechť S je $(T + \forall x P(x))$. Která z teorií T a S je rekurzívně axiomatizovatelná? Která z nich je konzervativním rozšířením teorie SUCC? Která z nich je úplná? A která z nich je rozhodnutelná?

   Návod. Zdůvodněte, že například sentence $\exists x(P(x) \mathbin{\&} P(\mathrm{S}(x)))$ je nezávislá na T. Dále zdůvodněte, že S připouští eliminaci kvantifikátorů.

4. Nechť T_1 je teorie $\mathsf{Q} - \{\mathrm{Q1}\}$ a nechť T_2 je teorie $\mathsf{Q} - \{\mathrm{Q2}\}$. Zdůvodněte, že jak T_1, tak T_2 má konečný (dokonce velmi malý) model. Vyvoďte z toho, že ani jedna z těchto teorií není podstatně nerozhodnutelná.

5. Dokažte, že když graf funkce $f : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ je Δ_0-definovatelný, pak existuje Δ_0-formule $\gamma(y, x)$, která funkci f *slabě reprezentuje* v tom smyslu, že:
$$\forall n \forall m (m = f(n) \;\Rightarrow\; \mathsf{Q} \vdash \forall y(\gamma(y, \overline{n}) \;\equiv\; y = \overline{m})).$$

6. Nechť T je teorie splňující předpoklady První Gödelovy věty a nechť σ je Σ_1-sentence nezávislá na T. Dokažte, že $(T + \sigma)$ není, ale $(T + \neg\sigma)$ je Σ_1-korektní.

7. Tvrzení, že každé sudé číslo větší než 3 je součtem dvou prvočísel, se nazývá Goldbachova domněnka a není o něm známo, zda je pravdivé. Dokažte, že je-li toto tvrzení nezávislé na PA, pak platí v $\mathbb{N}$.

8. Nechť $\mathcal{M}$ je model Peanovy aritmetiky a nechť a je jeho nestandardní prvek. Pak množina $K = \{\, b \in M\,;\, \exists n \in \mathrm{N}(b \leq a^{\overline{n}}) \,\}$, kterou můžeme schématicky označit jako a^{N}, je uzavřená na operace, takže je nosnou množinou podstruktury $\mathcal{K}$ modelu $\mathcal{M}$. Dokažte, že identická funkce na K zachovává všechny

Δ_0-formule, tj. že $\mathcal{K}$ je Δ_0-elementární podstrukturou modelu $\mathcal{M}$. Z toho, že mocnina (se základem 2) je Δ_0-definovatelná, vyvoďte, že $K \neq M$.

9. Nechť T je bezesporné rozšíření PA, nechť $\tau(z) \in \Sigma$ je definice množiny T a nechť ν je řešení rovnice $T \vdash \nu \equiv \neg \mathsf{Pr}_\tau(\overline{\nu})$. Dokažte, že pak $\mathsf{PA} \vdash \nu \to \mathrm{Con}(\tau)$. Vyvoďte z toho, že $T \nvdash \mathsf{Con}(\tau) \to \neg \mathsf{Pr}_\tau(\overline{\neg\nu})$.

10. Nechť $\pi^*(z)$ je formule $\pi(z)$ & $\mathsf{Con}(\pi)$. Dokažte podrobně, že $\pi^*(z)$ je definice PA v $\mathbb{N}$ a že $\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Con}(\pi^*)$. Proč tento fakt není ve sporu s Druhou Gödelovou větou?

11. Nechť $\tau(z)$ je formule $\pi(z) \vee \exists y{<}z\, \mathsf{Proof}_\pi(\overline{\neg\mathsf{Con}(\pi)}, y)$. Ověřte, že $\tau(z)$ je Δ_0-definice PA v $\mathbb{N}$. Axiomy PA popisuje jako všechny axiomy teorie π plus všechny sentence větší než nejmenší důkaz sentence $\neg\mathsf{Con}(\pi)$, pokud takové důkazy existují. Dokažte, že $\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Pr}_\pi(\overline{\neg\mathsf{Con}(\pi)}) \to \neg\mathsf{Con}(\tau)$. Vyvoďte z toho, že $\mathsf{PA} \nvdash \mathsf{Con}(\pi) \to \mathsf{Con}(\tau)$. Jinak by totiž sentence $\mathsf{Con}(\pi + \overline{\mathsf{Con}(\pi)})$, která je PA-ekvivalentní s $\neg\mathsf{Pr}_\pi(\overline{\neg\mathsf{Con}(\pi)})$, byla dokazatelná v $(\mathsf{PA} + \mathsf{Con}(\pi))$.

12. Nechť T je rozšíření Q a nechť $\tau(z) \in \Delta_0$ je definice množiny T v $\mathbb{N}$. Zdůvodněte podrobně, že jak sentence $0 = 0$, tak sentence $0 \neq 0$ je řešením autoreferenční rovnice $T \vdash \varphi \equiv \forall y(\mathsf{Proof}_\tau(\overline{\neg\varphi}, y) \to \exists v{\leq}y\, \mathsf{Proof}_\tau(\overline{\varphi}, v))$.

13. Nechť T je bezesporné rozšíření PA, nechť $\tau(z) \in \Delta_0$ definuje T v $\mathbb{N}$ a nechť ρ je řešení rovnice $T \vdash \rho \equiv \forall y(\mathsf{Proof}_\tau(\overline{\rho}, y) \to \exists v{\leq}y\, \mathsf{Proof}_\tau(\overline{\neg\rho}, v))$. Dokažte, že $\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Con}(\tau) \to \neg\mathsf{Pr}_\tau(\overline{\rho})\, \&\, \neg\mathsf{Pr}_\tau(\overline{\neg\rho})$, neboli že důkaz nezávislosti sentence ρ lze formalizovat v PA.

    Návod. Stačilo by předpokládat, že T je rozšíření Q, ale důkaz by byl obtížnější. Nechť σ je pomocná sentence $\exists v(\mathsf{Proof}_\tau(\overline{\neg\rho}, v)\, \&\, \forall y{<}v\, \neg\mathsf{Proof}_\tau(\overline{\rho}, y))$. Pro sentenci σ platí $T \vdash \sigma \to \rho$, což je jedna z věcí, se kterými by v Q byla potíž. Dále využijte, že $\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Pr}_\tau(\overline{\sigma \to \rho})$, $\mathsf{PA} \vdash \sigma \to \mathsf{Pr}_\tau(\overline{\sigma})$ a $\mathsf{PA} \vdash \neg\rho \to \mathsf{Pr}_\tau(\overline{\neg\rho})$.

14. Dokažte ve výrokové variantě kalkulu GK všechny formule ze cvičení 16. V predikátové variantě kalkulu GK dokažte všechny formule ze cvičení 22, sentenci ze cvičení 24, a také sentenci $\exists x(P(x) \to \forall y P(y))$.

15. Navrhněte dvě dodatečná pravidla kalkulu GK pro případ, že i spojka $\equiv$ se považuje za základní symbol. Pro výsledný kalkulus má platit věta o úplnosti a vlastnost podformulí (subformula property).

16. Pro každé z následujících schémat nalezněte důkaz v kalkulu GJ, nebo kripkovský protipříklad na některou instanci:

    $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$, $\qquad A \vee \neg A \to (\neg\neg A \to A)$,
    $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$, $\qquad \neg\neg A \vee (\neg\neg A \to A)$,
    $(\neg\neg A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$, $\qquad (A \to \neg\neg B) \to (\neg\neg A \to \neg\neg B)$,

$(A \to B) \vee (B \to A)$, $(A \to \neg\neg B) \to \neg\neg(A \to B)$,
$\neg(A \to B) \to \neg B$, $\neg\neg(A \to B) \to (A \to \neg\neg B)$,
$\neg(A \to B) \to A$, $A \,\&\, (B \vee C) \to (A \,\&\, B) \vee (A \,\&\, C)$,
$\neg(A \to B) \to \neg\neg A$, $A \vee (B \,\&\, C) \to (A \vee B) \,\&\, (A \vee C)$,
$(A \to B) \to ((\neg A \to B) \to B)$, $A \to (B \vee C) \to (A \to B) \vee (A \to C)$,
$(A \to B) \to (\neg\neg A \to \neg\neg B)$, $\neg\neg(A \,\&\, B) \equiv (\neg\neg A \,\&\, \neg\neg B)$,
$\neg A \vee \neg\neg A$, $\neg\neg(\neg\neg A \to A)$.

17. *Kořen* kripkovského rámce definujme jako vrchol, z něhož jsou dosažitelné všechny vrcholy rámce. Zdůvodněte, že není-li výroková formule intuicionistickou tautologií, pak je nesplněna v kořenu určitého kripkovského modelu.

18. *Amalgamace* jako operace fungující na rámcích s kořenem je definována následovně. Jsou-li $K_1, \ldots, K_n$ rámce s kořeny $b_1, \ldots, b_n$, pak z nich utvořený rámec K sestává z disjunktního sjednocení rámců $K_1, \ldots, K_n$ a jednoho dodatečného vrcholu a, z něhož jsou dosažitelné všechny $b_1, \ldots, b_n$ (takže jsou z něj dosažitelné vůbec všechny vrcholy rámce K, takže a je v K kořenem). Zdůvodněte pomocí amalgamace, že když $A \vee B$ je intuicionistická tautologie, pak alespoň jedna z formulí A a B je intuicionistická tautologie.

19. Formule je *harropovská*, jestliže každý výskyt spojky $\vee$ se v ní nachází v rozsahu nějaké negace nebo v "levém rozsahu" nějaké implikace. Takže například $r \to p \vee q$ není harropovská formule. Když $A \to B$ je harropovská, pak B musí být harropovská, ale A nemusí. Zdůvodněte, že je-li K rámec s kořenem a sestrojený amalgamací z rámců $K_1, \ldots, K_n$ s kořeny $b_1, \ldots, b_n$, pak z K lze vhodnou volbou pravdivostních hodnot atomů v a získat model, který má tuto vlastnost: každá harropovská formule je splněna v a, právě když je splněna ve všech $b_1, \ldots, b_n$.

20. S užitím předchozího cvičení dokažte toto: když Γ je množina harropovských formulí a $A \vee B$ intuicionisticky vyplývá z Γ, tj. je v každém modelu splněna ve všech vrcholech, ve kterých jsou splněny všechny formule z Γ, pak alespoň jedna z formulí A a B intuicionisticky vyplývá z Γ.

21. Zdůvodněte, že přestože množina $\{(\neg\neg p \to p) \to (p \vee \neg p)\}$ není množinou harropovských formulí, tvrzení z přechozího cvičení pro ni platí také (a nevadí při tom, když se atom p vyskytuje v disjunkci $A \vee B$).

    Návod. Amalgamaci aplikujte ne na dva, ale na tři modely, přičemž třetí je protipříklad na formuli $\neg\neg p \to p$.

22. Nechť φ a ψ jsou predikátové formule a nechť χ je formule neobsahující volné výskyty proměnné x. Pro každé z následujících schémat nalezněte důkaz v kalkulu GJ, nebo kripkovský protipříklad na některou instanci.

$$\begin{array}{ll}
\neg\exists x\varphi \equiv \forall x\neg\varphi, & \forall x(\varphi \,\&\, \psi) \equiv \forall x\varphi \,\&\, \forall x\psi, \\
\exists x\neg\varphi \rightarrow \neg\forall x\varphi, & \forall x(\chi \vee \varphi) \equiv \chi \vee \forall x\varphi, \\
\exists x(\chi \vee \varphi) \equiv \chi \vee \exists x\varphi, & \forall x(\chi \rightarrow \varphi) \equiv \chi \rightarrow \forall x\varphi, \\
\exists x(\neg\varphi \rightarrow \forall v\neg\varphi_x(v)), & \forall x(\varphi \rightarrow \chi) \equiv \exists x\varphi \rightarrow \chi, \\
\neg\neg\exists x(\varphi \rightarrow \forall v\varphi_x(v)), & \forall x(\varphi \vee \neg\varphi) \,\&\, \forall x\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\forall x\varphi, \\
\neg\neg\forall x\varphi \rightarrow \forall x\neg\neg\varphi, & \forall x(\varphi \vee \neg\varphi) \rightarrow (\neg\neg\exists x\varphi \rightarrow \exists x\varphi).
\end{array}$$

23. Zdůvodnětě, že když $\langle W, \leq\rangle$ je uspořádaná množina, v níž je z každého vrcholu dosažitelný nějaký *list* (vrchol, z něhož je dosažitelný pouze on sám), pak v každé kripkovské struktuře tvaru $\langle W, \leq, \mathcal{J}\rangle$ platí schéma DNS. Speciálně, schéma DNS platí ve všech strukturách $\langle W, \leq, \mathcal{J}\rangle$, kde W je konečná.

24. Najděte kripkovský protipříklad na sentenci $\exists x(\exists y P(y) \rightarrow P(x))$. Zdůvodněte, že existuje dokonce protipříklad $\langle W, \leq, \mathcal{J}\rangle$, který má konstantní univerzum a jehož rámec rámec $\langle W, \leq\rangle$ je lineárně uspořádanou množinou.

    Návod. Nejprve si všimněte, že je-li $\langle W, \leq\rangle$ dokonce dobře uspořádanou množinou, sentence $\exists x(\exists y P(y) \rightarrow P(x))$ platí v každé struktuře $\langle W, \leq, \mathcal{J}\rangle$.

25. Nechť φ^* je formule získaná z φ vložením dvojné negace za každý univerzální kvantifikátor. Pro libovolnou množinu formulí Δ nechť Δ^* je $\{\, \varphi^* \,;\, \varphi \in \Delta \,\}$ a nechť $\neg\Delta$ je $\{\, \neg\varphi \,;\, \varphi \in \Delta \,\}$. Dokažte, že je-li sekvent $\langle\, \Gamma \Rightarrow \Delta \,\rangle$ dokazatelný v GK, pak $\langle\, \Gamma^*, \neg\Delta^* \Rightarrow \,\rangle$ je dokazatelný v GJ. Z toho (a z úplnosti kalkulů GK a GJ) plyne existence překladu klasické predikátové logiky do intuicionistické, neboli predikátová varianta Glivenkovy věty: formule φ je klasicky logicky platná, právě když $\neg\neg\varphi^*$ je intuicionisticky logicky platná.