A

Odpovídejte ve větách. Všechny symbolické zápisy, které nejsou umístěny ve větě, mohou být ignorovány. Hodnotí se postup, nikoliv výsledek. Odpovědi pište přímo na tento papír (po obou stranách), až v případě nedostatku místa a pro pomocné výpočty použijte vlastní papír. Nezapomeňte na podpis!
U pojmů zvýrazněných kurzívou dejte vhodným způsobem najevo, že znáte definici.

1. Rozhodněte, zda existuje výroková formule A sestavená jen z atomů p a q taková, že obě formule $A \to (p \,\&\, q)$ a $A \vee \neg p$ jsou *tautologie*. Pokud ano, existují dokonce navzájem neekvivalentní formule A s uvedenou vlastností?

2. Předpokládejte, že jiné logické spojky než implikace a negace se neuvažují, a nechť funkce h z množiny všech výrokových formulí do množiny všech výrokových formulí je definována následující rekurzí: $h(p) = p$, je-li p výrokový atom, $h(A \to B) = h(A) \to h(B)$, $h(\neg A) = h(A)$. Funkce h tedy z každé výrokové formule odstraní všechny negace. Rozhodněte, zda platí:
   (a) Je-li A *dokazatelná* (v obvyklém výrokovém kalkulu s axiomy A1–A3), pak $h(A)$ je tautologie.
   (b) Je-li A dokazatelná bez užití axiomu A3, pak $h(A)$ je tautologie.

3. Nechť P, Q jsou unární a R binární predikátový symbol. Rozhodněte, které z následujících formulí jsou *logicky platnými formulemi*:
   $\forall x P(x) \to P(x)$
   $\exists x P(x) \to P(x)$
   $\exists x(\forall y P(y) \to P(x))$
   $\forall x \forall y R(x,y) \to \forall y R(y,y)$
   $\exists x P(x) \,\&\, \exists x Q(x) \to \exists x(P(x) \,\&\, Q(x))$.

4. Vyberte si dvě formule z předchozího cvičení a zdůvodněte o nich, že jsou v predikátovém kalkulu *dokazatelné*. Přitom můžete využít větu o úplnosti výrokového kalkulu, ale nikoliv větu o úplnosti predikátového kalkulu.

5. Nechť T je teorie s jazykem $\{R\}$ obsahujícím jeden binární predikátový symbol a s axiomy
   $\forall x \forall y \forall z(R(x,y) \ \&\ R(y,z) \ \to\ R(x,z))$
   $\forall x \forall y \neg R(x,x)$
   $\forall x \forall y(R(x,y) \ \vee\ x = y \ \vee\ R(y,x))$.

   Označme $A(x,y)$ formuli $\exists v(R(x,v) \ \&\ R(v,y))$. O každé z následujících formulí a také o jejich negacích rozhodněte, zda *vyplývají* z T.
   $\forall x \forall y \forall z(A(x,y) \ \&\ A(y,z) \ \to\ A(x,z))$
   $\forall x \forall y(A(x,y) \ \vee\ x = y \ \vee\ A(y,x))$
   $\forall x \forall y(A(x,y) \ \to\ \neg A(y,x))$.

   Přitom předpokládejte, že pracujete v predikátové logice s rovností, tj. že symbol $=$ je v každé struktuře s nosnou množinou D povinně realizován identitou, tj. relací $\{\, [a,a]\,;\ a \in D \,\}$.