B

Odpovídejte ve větách. Všechny symbolické zápisy, které nejsou umístěny ve větě, mohou být ignorovány. Hodnotí se postup, nikoliv výsledek. Odpovědi pište přímo na tento papír (po obou stranách), až v případě nedostatku místa a pro pomocné výpočty použijte vlastní papír. Nezapomeňte na podpis!
U pojmů zvýrazněných kurzívou dejte vhodným způsobem najevo, že znáte definici.

1. Rozhodněte, zda existuje výroková formule A sestavená jen z atomů p a q taková, že obě formule $A \to (p \vee q)$ a $A \vee \neg p$ jsou *tautologie*. Pokud ano, existují dokonce navzájem neekvivalentní formule A s uvedenou vlastností?

2. Uvažujte smyšlený výrokově logický systém $\mathcal{S}$, ve kterém se připouští jediná logická spojka $\to$, jediné axiomatické schema $A \to A$ a jediné odvozovací pravidlo modus ponens. Rozhodněte, zda
   (a) V systému $\mathcal{S}$ lze dokázat i nějakou formuli, která není axiomem.
   (b) Pro systém $\mathcal{S}$ platí věta o dedukci.

3. Nechť P, Q jsou unární a R binární predikátový symbol. Rozhodněte, které z následujících formulí jsou *logicky platnými formulemi*:

   $P(x) \to \exists x P(x)$
   $P(x) \to \forall x P(x)$
   $\exists x (P(x) \to \forall y P(y))$
   $\forall x \exists y R(x, y) \to \exists x \exists y R(x, y)$
   $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \to \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$.

4. Vyberte si dvě formule z předchozího cvičení a zdůvodněte o nich, že jsou v predikátovém kalkulu *dokazatelné*. Přitom můžete využít větu o úplnosti výrokového kalkulu, ale nikoliv větu o úplnosti predikátového kalkulu.

5. Nechť F je unární funkční symbol a nechť R je binární predikátový symbol. O každé z následujících formulí rozhodněte, zda je logicky platnou formulí:

   $\forall x \exists y (R(x, y) \vee \neg R(x, F(y)))$
   $\forall x \exists z \forall y (R(x, y) \vee \neg R(y, z))$.