Logika, Gödel, neúplnost

Vítězslav Švejdar

Karlova Univerzita v Praze, http://www.cuni.cz/~svejdar/

Český klub skeptiků, 23. únor 2018

Obsah

Symboly a symbolické zápisy

Příklad 1

Každé přirozené číslo tvaru $7 + 30k$ je prvočíslo.
Tedy 127, čili $7 + 30 \cdot 4$, je prvočíslo.

Symboly a symbolické zápisy

Příklad 1

Každé přirozené číslo tvaru $7 + 30k$ je prvočíslo.
Tedy 127, čili $7 + 30 \cdot 4$, je prvočíslo.

Příklad 2

Kdykoliv je číslo 3 dělitelem čísla $x \cdot y$, pak je dělitelem některého z činitelů x a y.

Symboly a symbolické zápisy

Příklad 1

Každé přirozené číslo tvaru $7 + 30k$ je prvočíslo.
Tedy 127, čili $7 + 30 \cdot 4$, je prvočíslo.

Příklad 2

Kdykoliv je číslo 3 dělitelem čísla $x \cdot y$, pak je dělitelem některého z činitelů x a y.

Příklad 3

Everybody loves my baby, my baby loves nobody but me.

Symboly a symbolické zápisy

Příklad 1

Každé přirozené číslo tvaru $7 + 30k$ je prvočíslo.
Tedy 127, čili $7 + 30 \cdot 4$, je prvočíslo.

Příklad 2

Kdykoliv je číslo 3 dělitelem čísla $x \cdot y$, pak je dělitelem některého z činitelů x a y. Symbolicky: $\forall x \forall y (\qquad \rightarrow \qquad \vee \qquad)$.

Příklad 3

Everybody loves my baby, my baby loves nobody but me.

Symboly a symbolické zápisy

Příklad 1

Každé přirozené číslo tvaru $7 + 30k$ je prvočíslo.
Tedy 127, čili $7 + 30 \cdot 4$, je prvočíslo.

Příklad 2

Kdykoliv je číslo 3 dělitelem čísla $x \cdot y$, pak je dělitelem některého z činitelů x a y. Symbolicky: $\forall x \forall y (3 \mid x \cdot y \rightarrow 3 \mid x \vee 3 \mid y)$.

Příklad 3

Everybody loves my baby, my baby loves nobody but me.

Symboly a symbolické zápisy

Příklad 1

Každé přirozené číslo tvaru $7 + 30k$ je prvočíslo.
Tedy 127, čili $7 + 30 \cdot 4$, je prvočíslo.

Příklad 2

Kdykoliv je číslo 3 dělitelem čísla $x \cdot y$, pak je dělitelem některého z činitelů x a y. Symbolicky: $\forall x \forall y(3 \mid x \cdot y \rightarrow 3 \mid x \vee 3 \mid y)$.

Příklad 3

Everybody loves my baby, my baby loves nobody but me.
Symbolicky: $\forall x L(x, B)$ & $\forall y(L(B, y) \rightarrow y = M)$.

Symboly a symbolické zápisy

Příklad 1

Každé přirozené číslo tvaru $7 + 30k$ je prvočíslo.
Tedy 127, čili $7 + 30 \cdot 4$, je prvočíslo.

Příklad 2

Kdykoliv je číslo 3 dělitelem čísla $x \cdot y$, pak je dělitelem některého z činitelů x a y. Symbolicky: $\forall x \forall y(3 \mid x \cdot y \;\rightarrow\; 3 \mid x \;\vee\; 3 \mid y)$.

Příklad 3

Everybody loves my baby, my baby loves nobody but me.
Symbolicky: $\forall x L(x, B) \;\&\; \forall y(L(B, y) \;\rightarrow\; y = M)$.

Symbolické zápisy tvrzení a podmínek (čili formule)

obsahují *mimologické symboly*, například $+, \cdot, |, L, M, B$,
a *logické symboly*. Logické symboly jsou
logické spojky $\rightarrow$, &, $\vee$ a $\neg$, a *kvantifikátory* $\forall$ a $\exists$.
Mezi logické symboly lze počítat i rovnítko $=$.

Příklady důkazů

Důkaz tvrzení o dělitelnosti třemi z Příkladu 2

Nechť $3 \mid x$ neplatí, a $3 \mid y$ také neplatí.

Příklady důkazů

Důkaz tvrzení o dělitelnosti třemi z Příkladu 2

Nechť $3 \mid x$ neplatí, a $3 \mid y$ také neplatí.

Takže máme k takové, že $x = 3k + 1$ nebo $x = 3k + 2$,

Příklady důkazů

Důkaz tvrzení o dělitelnosti třemi z Příkladu 2

Nechť $3 \mid x$ neplatí, a $3 \mid y$ také neplatí.
Takže máme k takové, že $x = 3k + 1$ nebo $x = 3k + 2$,
a současně máme n takové, že $y = 3n + 1$ nebo $y = 3n + 2$.

Příklady důkazů

Důkaz tvrzení o dělitelnosti třemi z Příkladu 2

Nechť $3 \mid x$ neplatí, a $3 \mid y$ také neplatí.
Takže máme k takové, že $x = 3k + 1$ nebo $x = 3k + 2$,
a současně máme n takové, že $y = 3n + 1$ nebo $y = 3n + 2$.
Když $x = 3k + 1$ a $y = 3n + 1$, pak $x \cdot y = 9kn + 3k + 3n + 1$.

Příklady důkazů

Důkaz tvrzení o dělitelnosti třemi z Příkladu 2

Nechť $3 \mid x$ neplatí, a $3 \mid y$ také neplatí.
Takže máme k takové, že $x = 3k + 1$ nebo $x = 3k + 2$,
a současně máme n takové, že $y = 3n + 1$ nebo $y = 3n + 2$.
Když $x = 3k + 1$ a $y = 3n + 1$, pak $x \cdot y = 9kn + 3k + 3n + 1$.
Když $x = 3k + 1$ a $y = 3n + 2$, pak $x \cdot y = 9kn + 6k + 3n + 2$.
Když $x = 3k + 2$ a $y = 3n + 1$, pak $x \cdot y = 9kn + 3k + 6n + 2$.

Příklady důkazů

Důkaz tvrzení o dělitelnosti třemi z Příkladu 2

Nechť $3 \mid x$ neplatí, a $3 \mid y$ také neplatí.
Takže máme k takové, že $x = 3k + 1$ nebo $x = 3k + 2$,
a současně máme n takové, že $y = 3n + 1$ nebo $y = 3n + 2$.
Když $x = 3k + 1$ a $y = 3n + 1$, pak $x \cdot y = 9kn + 3k + 3n + 1$.
Když $x = 3k + 1$ a $y = 3n + 2$, pak $x \cdot y = 9kn + 6k + 3n + 2$.
Když $x = 3k + 2$ a $y = 3n + 1$, pak $x \cdot y = 9kn + 3k + 6n + 2$.
Když $x = 3k + 2$ a $y = 3n + 2$, pak $x \cdot y = 9kn + 6k + 6n + 3 + 1$.

Příklady důkazů

Důkaz tvrzení o dělitelnosti třemi z Příkladu 2

Nechť $3 \mid x$ neplatí, a $3 \mid y$ také neplatí.
Takže máme k takové, že $x = 3k + 1$ nebo $x = 3k + 2$,
a současně máme n takové, že $y = 3n + 1$ nebo $y = 3n + 2$.
Když $x = 3k + 1$ a $y = 3n + 1$, pak $x \cdot y = 9kn + 3k + 3n + 1$.
Když $x = 3k + 1$ a $y = 3n + 2$, pak $x \cdot y = 9kn + 6k + 3n + 2$.
Když $x = 3k + 2$ a $y = 3n + 1$, pak $x \cdot y = 9kn + 3k + 6n + 2$.
Když $x = 3k + 2$ a $y = 3n + 2$, pak $x \cdot y = 9kn + 6k + 6n + 3 + 1$.
Všechny čtyři případy jsou příznivé, $x \cdot y$ není dělitelné třemi.

Příklady důkazů

Důkaz tvrzení o dělitelnosti třemi z Příkladu 2

Nechť $3 \mid x$ neplatí, a $3 \mid y$ také neplatí.
Takže máme k takové, že $x = 3k + 1$ nebo $x = 3k + 2$,
a současně máme n takové, že $y = 3n + 1$ nebo $y = 3n + 2$.
Když $x = 3k + 1$ a $y = 3n + 1$, pak $x \cdot y = 9kn + 3k + 3n + 1$.
Když $x = 3k + 1$ a $y = 3n + 2$, pak $x \cdot y = 9kn + 6k + 3n + 2$.
Když $x = 3k + 2$ a $y = 3n + 1$, pak $x \cdot y = 9kn + 3k + 6n + 2$.
Když $x = 3k + 2$ a $y = 3n + 2$, pak $x \cdot y = 9kn + 6k + 6n + 3 + 1$.
Všechny čtyři případy jsou příznivé, $x \cdot y$ není dělitelné třemi.
Tím je dokázáno $\forall x \forall y (3 \mid x \cdot y \rightarrow 3 \mid x \vee 3 \mid y)$.

Příklady důkazů

Důkaz tvrzení o dělitelnosti třemi z Příkladu 2

Nechť $3 \mid x$ neplatí, a $3 \mid y$ také neplatí.
Takže máme k takové, že $x = 3k + 1$ nebo $x = 3k + 2$,
a současně máme n takové, že $y = 3n + 1$ nebo $y = 3n + 2$.
Když $x = 3k + 1$ a $y = 3n + 1$, pak $x \cdot y = 9kn + 3k + 3n + 1$.
Když $x = 3k + 1$ a $y = 3n + 2$, pak $x \cdot y = 9kn + 6k + 3n + 2$.
Když $x = 3k + 2$ a $y = 3n + 1$, pak $x \cdot y = 9kn + 3k + 6n + 2$.
Když $x = 3k + 2$ a $y = 3n + 2$, pak $x \cdot y = 9kn + 6k + 6n + 3 + 1$.
Všechny čtyři případy jsou příznivé, $x \cdot y$ není dělitelné třemi.
Tím je dokázáno $\forall x \forall y (3 \mid x \cdot y \rightarrow 3 \mid x \vee 3 \mid y)$.

Logický důsledek dvou veršů z Příkladu 3

Příklady důkazů

Důkaz tvrzení o dělitelnosti třemi z Příkladu 2

Nechť $3 \mid x$ neplatí, a $3 \mid y$ také neplatí.
Takže máme k takové, že $x = 3k + 1$ nebo $x = 3k + 2$,
a současně máme n takové, že $y = 3n + 1$ nebo $y = 3n + 2$.
Když $x = 3k + 1$ a $y = 3n + 1$, pak $x \cdot y = 9kn + 3k + 3n + 1$.
Když $x = 3k + 1$ a $y = 3n + 2$, pak $x \cdot y = 9kn + 6k + 3n + 2$.
Když $x = 3k + 2$ a $y = 3n + 1$, pak $x \cdot y = 9kn + 3k + 6n + 2$.
Když $x = 3k + 2$ a $y = 3n + 2$, pak $x \cdot y = 9kn + 6k + 6n + 3 + 1$.
Všechny čtyři případy jsou příznivé, $x \cdot y$ není dělitelné třemi.
Tím je dokázáno $\forall x \forall y(3 \mid x \cdot y \rightarrow 3 \mid x \vee 3 \mid y)$.

Logický důsledek dvou veršů z Příkladu 3

Protože $\forall x L(x, B)$, máme i $L(B, B)$.

Příklady důkazů

Důkaz tvrzení o dělitelnosti třemi z Příkladu 2

Nechť $3 \mid x$ neplatí, a $3 \mid y$ také neplatí.
Takže máme k takové, že $x = 3k + 1$ nebo $x = 3k + 2$,
a současně máme n takové, že $y = 3n + 1$ nebo $y = 3n + 2$.
Když $x = 3k + 1$ a $y = 3n + 1$, pak $x \cdot y = 9kn + 3k + 3n + 1$.
Když $x = 3k + 1$ a $y = 3n + 2$, pak $x \cdot y = 9kn + 6k + 3n + 2$.
Když $x = 3k + 2$ a $y = 3n + 1$, pak $x \cdot y = 9kn + 3k + 6n + 2$.
Když $x = 3k + 2$ a $y = 3n + 2$, pak $x \cdot y = 9kn + 6k + 6n + 3 + 1$.
Všechny čtyři případy jsou příznivé, $x \cdot y$ není dělitelné třemi.
Tím je dokázáno $\forall x \forall y (3 \mid x \cdot y \rightarrow 3 \mid x \vee 3 \mid y)$.

Logický důsledek dvou veršů z Příkladu 3

Protože $\forall x L(x, B)$, máme i $L(B, B)$.
Protože $\forall y (L(B, y) \rightarrow y = M)$, máme i $L(B, B) \rightarrow B = M$.

Příklady důkazů

Důkaz tvrzení o dělitelnosti třemi z Příkladu 2

Nechť $3 \mid x$ neplatí, a $3 \mid y$ také neplatí.
Takže máme k takové, že $x = 3k + 1$ nebo $x = 3k + 2$,
a současně máme n takové, že $y = 3n + 1$ nebo $y = 3n + 2$.
Když $x = 3k + 1$ a $y = 3n + 1$, pak $x \cdot y = 9kn + 3k + 3n + 1$.
Když $x = 3k + 1$ a $y = 3n + 2$, pak $x \cdot y = 9kn + 6k + 3n + 2$.
Když $x = 3k + 2$ a $y = 3n + 1$, pak $x \cdot y = 9kn + 3k + 6n + 2$.
Když $x = 3k + 2$ a $y = 3n + 2$, pak $x \cdot y = 9kn + 6k + 6n + 3 + 1$.
Všechny čtyři případy jsou příznivé, $x \cdot y$ není dělitelné třemi.
Tím je dokázáno $\forall x \forall y (3 \mid x \cdot y \rightarrow 3 \mid x \vee 3 \mid y)$.

Logický důsledek dvou veršů z Příkladu 3

Protože $\forall x L(x, B)$, máme i $L(B, B)$.
Protože $\forall y (L(B, y) \rightarrow y = M)$, máme i $L(B, B) \rightarrow B = M$.
Z $L(B, B)$ a $L(B, B) \rightarrow B = M$ plyne

Příklady důkazů

Důkaz tvrzení o dělitelnosti třemi z Příkladu 2

Nechť $3 \mid x$ neplatí, a $3 \mid y$ také neplatí.
Takže máme k takové, že $x = 3k + 1$ nebo $x = 3k + 2$,
a současně máme n takové, že $y = 3n + 1$ nebo $y = 3n + 2$.
Když $x = 3k + 1$ a $y = 3n + 1$, pak $x \cdot y = 9kn + 3k + 3n + 1$.
Když $x = 3k + 1$ a $y = 3n + 2$, pak $x \cdot y = 9kn + 6k + 3n + 2$.
Když $x = 3k + 2$ a $y = 3n + 1$, pak $x \cdot y = 9kn + 3k + 6n + 2$.
Když $x = 3k + 2$ a $y = 3n + 2$, pak $x \cdot y = 9kn + 6k + 6n + 3 + 1$.
Všechny čtyři případy jsou příznivé, $x \cdot y$ není dělitelné třemi.
Tím je dokázáno $\forall x \forall y (3 \mid x \cdot y \;\rightarrow\; 3 \mid x \;\vee\; 3 \mid y)$.

Logický důsledek dvou veršů z Příkladu 3

Protože $\forall x L(x, B)$, máme i $L(B, B)$.
Protože $\forall y (L(B, y) \;\rightarrow\; y = M)$, máme i $L(B, B) \;\rightarrow\; B = M$.
Z $L(B, B)$ a $L(B, B) \;\rightarrow\; B = M$ plyne $B = M$.

Formalizace důkazů, úplnost[1]

Logické kroky v důkazech

Formalizace důkazů, úplnost[1]

Logické kroky v důkazech

Instanciace Z $\forall x \varphi(x)$ lze (je povoleno) odvodit $\varphi(t)$.
Z $\varphi(t)$ lze odvodit $\exists x \varphi(x)$.

Formalizace důkazů, úplnost[1]

Logické kroky v důkazech

Instanciace Z $\forall x \varphi(x)$ lze (je povoleno) odvodit $\varphi(t)$.
Z $\varphi(t)$ lze odvodit $\exists x \varphi(x)$.

Rozbor případů Z $\alpha \to \varphi$, $\beta \to \varphi$ a $\alpha \vee \beta$ lze odvodit φ.

Formalizace důkazů, úplnost[1]

Logické kroky v důkazech

Instanciace	Z $\forall x\varphi(x)$ lze (je povoleno) odvodit $\varphi(t)$. Z $\varphi(t)$ lze odvodit $\exists x\varphi(x)$.
Rozbor případů	Z $\alpha \to \varphi$, $\beta \to \varphi$ a $\alpha \vee \beta$ lze odvodit φ.
Generalizace	Z $\psi \to \varphi(x)$ lze odvodit $\psi \to \forall x\varphi(x)$, pokud se ve ψ nemluví o x. Také z $\varphi(x) \to \psi$ lze odvodit $\exists x\varphi(x) \to \psi$, pokud se ve ψ nemluví o x.

Formalizace důkazů, úplnost[1]

Logické kroky v důkazech

Instanciace Z $\forall x \varphi(x)$ lze (je povoleno) odvodit $\varphi(t)$.
Z $\varphi(t)$ lze odvodit $\exists x \varphi(x)$.

Rozbor případů Z $\alpha \rightarrow \varphi$, $\beta \rightarrow \varphi$ a $\alpha \vee \beta$ lze odvodit φ.

Generalizace Z $\psi \rightarrow \varphi(x)$ lze odvodit $\psi \rightarrow \forall x \varphi(x)$, pokud se ve ψ nemluví o x. Také z $\varphi(x) \rightarrow \psi$ lze odvodit $\exists x \varphi(x) \rightarrow \psi$, pokud se ve ψ nemluví o x.

Modus ponens Z φ a $\varphi \rightarrow \psi$ lze odvodit ψ.

Formalizace důkazů, úplnost[1]

Logické kroky v důkazech

Instanciace Z $\forall x \varphi(x)$ lze (je povoleno) odvodit $\varphi(t)$.
Z $\varphi(t)$ lze odvodit $\exists x \varphi(x)$.

Rozbor případů Z $\alpha \to \varphi$, $\beta \to \varphi$ a $\alpha \vee \beta$ lze odvodit φ.

Generalizace Z $\psi \to \varphi(x)$ lze odvodit $\psi \to \forall x \varphi(x)$, pokud se ve ψ nemluví o x. Také z $\varphi(x) \to \psi$ lze odvodit $\exists x \varphi(x) \to \psi$, pokud se ve ψ nemluví o x.

Modus ponens Z φ a $\varphi \to \psi$ lze odvodit ψ.

Logický kalkulus

Je soubor povolených logických kroků. Díky kalkulům lze formalizovat (počítačově zpracovávat) nejen formule, ale i celé důkazy. *Věta o úplnosti*[1] pak tvrdí, že s určitým souborem povolených logických kroků lze vystačit ve *všech* důkazech.

Logická analýza

Je vyhledávání (mimologických) předpokladů v důkazech.
Například v důkazu o dělitelnosti třemi je použita distributivita násobení vůči sčítání: $\forall x \forall y \forall z (x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z)$.
Jednoznačnost dělení se zbytkem: kdykoliv platí $a = b \cdot q + r$ a přitom $r < b$, pak čísla q a r jsou čísly a a b určena jednoznačně.

Axiomatické teorie

Logická analýza

Je vyhledávání (mimologických) předpokladů v důkazech. Například v důkazu o dělitelnosti třemi je použita distributivita násobení vůči sčítání: $\forall x \forall y \forall z(x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z)$. Jednoznačnost dělení se zbytkem: kdykoliv platí $a = b \cdot q + r$ a přitom $r < b$, pak čísla q a r jsou čísly a a b určena jednoznačně.

Axiomatická teorie

je dána volbou *jazyka* (seznamu mimologických symbolů) a *axiomů* (předpokladů). Například *Peanova aritmetika* PA má jazyk obsahující symboly $+, \cdot, 0, \mathrm{S}$. Má sedm (někdy devět) jednotlivých axiomů plus schéma indukce.

Axiomatické teorie

Logická analýza

Je vyhledávání (mimologických) předpokladů v důkazech. Například v důkazu o dělitelnosti třemi je použita distributivita násobení vůči sčítání: $\forall x \forall y \forall z(x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z)$. Jednoznačnost dělení se zbytkem: kdykoliv platí $a = b \cdot q + r$ a přitom $r < b$, pak čísla q a r jsou čísly a a b určena jednoznačně.

Axiomatická teorie

je dána volbou *jazyka* (seznamu mimologických symbolů) a *axiomů* (předpokladů). Například *Peanova aritmetika* PA má jazyk obsahující symboly $+, \cdot, 0, \mathrm{S}$. Má sedm (někdy devět) jednotlivých axiomů plus schéma indukce. *Teorie množin* (ZF, GB) je dnes považována za jakousi podkladovou teorii pro veškerou matematiku, a také má přehlednou množinu axiomů.

Struktury, teorie vypozorované ze struktury

Některé teorie vzniknou vypozorováním axiomů z určité *struktury*.
Například $\mathbb{R} = \langle \mathrm{R}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$

Struktury, teorie vypozorované ze struktury

Některé teorie vzniknou vypozorováním axiomů z určité *struktury*. Například $\mathbb{R} = \langle \mathrm{R}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ je *struktura reálných čísel*,

Struktury, teorie vypozorované ze struktury

Některé teorie vzniknou vypozorováním axiomů z určité *struktury*. Například $\mathbb{R} = \langle \mathrm{R}, +, \cdot, 0, 1\rangle$ je *struktura reálných čísel*, axiomy mohou být vlastnosti operací $(\dots)$, plus axiomy typu $\forall a \forall b \forall c \forall d \exists x (ax^3 + bx^2 + cx + d = 0)$.

Struktury, teorie vypozorované ze struktury

Některé teorie vzniknou vypozorováním axiomů z určité *struktury*.
Například $\mathbb{R} = \langle \mathrm{R}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ je *struktura reálných čísel*, axiomy mohou být vlastnosti operací (...), plus axiomy typu
$\forall a \forall b \forall c \forall d \exists x (ax^3 + bx^2 + cx + d = 0)$.
Některé struktury lze *úplně*[2] axiomatizovat.

Struktury, teorie vypozorované ze struktury

Některé teorie vzniknou vypozorováním axiomů z určité *struktury*. Například $\mathbb{R} = \langle \mathrm{R}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ je *struktura reálných čísel*, axiomy mohou být vlastnosti operací (...), plus axiomy typu $\forall a \forall b \forall c \forall d \exists x (ax^3 + bx^2 + cx + d = 0)$.
Některé struktury lze *úplně*[2] axiomatizovat.

Definice

Teorie T je *úplná*[2], jestliže každá sentence φ je v ní dokazatelná nebo vyvratitelná (tj. $T \vdash \varphi$ nebo $T \vdash \neg\varphi$), ale ne obojí.

Struktury, teorie vypozorované ze struktury

Některé teorie vzniknou vypozorováním axiomů z určité *struktury*. Například $\mathbb{R} = \langle \mathrm{R}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ je *struktura reálných čísel*, axiomy mohou být vlastnosti operací (...), plus axiomy typu $\forall a \forall b \forall c \forall d \exists x (ax^3 + bx^2 + cx + d = 0)$.
Některé struktury lze *úplně*[2] axiomatizovat.

Definice

Teorie T je *úplná*[2], jestliže každá sentence φ je v ní dokazatelná nebo vyvratitelná (tj. $T \vdash \varphi$ nebo $T \vdash \neg\varphi$), ale ne obojí.

Příklad

Je známa úplná axiomatizace struktury $\langle \mathrm{R}, < \rangle$:

$\forall x \forall y \forall z (x < y \;\&\; y < z \rightarrow x < z)$

$\forall x \neg (x < x)$

$\forall x \forall y (x < y \vee x = y \vee y < x)$

$\forall x \forall y \exists z (x < z \;\&\; z < y)$

$\forall x \exists y \exists z (y < x \;\&\; x < z)$.

Další axiomatizovatelné struktury

Struktura $\langle \mathrm{N}, < \rangle$, čili diskrétní uspořádání (přirozených čísel).

Další axiomatizovatelné struktury

Struktura $\langle \mathrm{N}, < \rangle$, čili diskrétní uspořádání (přirozených čísel).

Struktura $\langle \mathrm{N}, +, 0, < \rangle$, čili aritmetika přirozených čísel bez násobení, čili *Presburgerova aritmetika*.

Další axiomatizovatelné struktury

Struktura $\langle \mathrm{N}, < \rangle$, čili diskrétní uspořádání (přirozených čísel).
Struktura $\langle \mathrm{N}, +, 0, < \rangle$, čili aritmetika přirozených čísel bez násobení, čili *Presburgerova aritmetika*.
Struktura $\langle \mathrm{R}, +, 0, < \rangle$, čili reálná čísla bez násobení.

Další axiomatizovatelné struktury

Struktura $\langle \mathrm{N}, < \rangle$, čili diskrétní uspořádání (přirozených čísel).
Struktura $\langle \mathrm{N}, +, 0, < \rangle$, čili aritmetika přirozených čísel bez násobení, čili *Presburgerova aritmetika*.
Struktura $\langle \mathrm{R}, +, 0, < \rangle$, čili reálná čísla bez násobení.
Struktura $\mathbb{R} = \langle \mathrm{R}, +, \cdot, 0, < \rangle$, čili plná *struktura reálných čísel*.

Další axiomatizovatelné struktury

Struktura $\langle \mathrm{N}, < \rangle$, čili diskrétní uspořádání (přirozených čísel).
Struktura $\langle \mathrm{N}, +, 0, < \rangle$, čili aritmetika přirozených čísel bez násobení, čili *Presburgerova aritmetika*.
Struktura $\langle \mathrm{R}, +, 0, < \rangle$, čili reálná čísla bez násobení.
Struktura $\mathbb{R} = \langle \mathrm{R}, +, \cdot, 0, < \rangle$, čili plná *struktura reálných čísel*.

Problém

V čem je struktura $\mathbb{N} = \langle \mathrm{N}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$, čili *struktura přirozených čísel*, jiná?

Rekurzívní a rekurzívně spočetné množiny

Definice

Množina A (syntaktických objektů nebo přirozených čísel) je *rekurzívní*, jestliže existuje algoritmus, který rozhoduje o náležení do A.

Rekurzívní a rekurzívně spočetné množiny

Definice

Množina A (syntaktických objektů nebo přirozených čísel) je *rekurzívní*, jestliže existuje algoritmus, který rozhoduje o náležení do A.

Množina A je *rekurzívně spočetná* (RE), jestliže existuje procedura (algoritmus, který nevyžaduje žádný vstup), která, je-li spuštěna, postupně vygeneruje všechny prvky množin A.

Rekurzívní a rekurzívně spočetné množiny

Definice

Množina A (syntaktických objektů nebo přirozených čísel) je *rekurzívní*, jestliže existuje algoritmus, který rozhoduje o náležení do A.

Množina A je *rekurzívně spočetná* (RE), jestliže existuje procedura (algoritmus, který nevyžaduje žádný vstup), která, je-li spuštěna, postupně vygeneruje všechny prvky množin A.

Příklad

Množina všech *důkazů* v dané axiomatické teorii T je rekurzívní.

Rekurzívní a rekurzívně spočetné množiny

Definice

Množina A (syntaktických objektů nebo přirozených čísel) je *rekurzívní*, jestliže existuje algoritmus, který rozhoduje o náležení do A.
Množina A je *rekurzívně spočetná* (*RE*), jestliže existuje procedura (algoritmus, který nevyžaduje žádný vstup), která, je-li spuštěna, postupně vygeneruje všechny prvky množin A.

Příklad

Množina všech *důkazů* v dané axiomatické teorii T je rekurzívní.
Množina všech *sentencí dokazatelných v* T je rekurzívně spočetná.

Rekurzívní a rekurzívně spočetné množiny

Definice

Množina A (syntaktických objektů nebo přirozených čísel) je *rekurzívní*, jestliže existuje algoritmus, který rozhoduje o náležení do A.

Množina A je *rekurzívně spočetná* (*RE*), jestliže existuje procedura (algoritmus, který nevyžaduje žádný vstup), která, je-li spuštěna, postupně vygeneruje všechny prvky množin A.

Příklad

Množina všech *důkazů* v dané axiomatické teorii T je rekurzívní.
Množina všech *sentencí dokazatelných v* T je rekurzívně spočetná.

Základní vlastnosti

Každá rekurzívní množina je rekurzívně spočetná, ale naopak to neplatí: existují *RE* množiny, které rekurzívní nejsou.

Rekurzívní a rekurzívně spočetné množiny

Definice

Množina A (syntaktických objektů nebo přirozených čísel) je *rekurzívní*, jestliže existuje algoritmus, který rozhoduje o náležení do A.
Množina A je *rekurzívně spočetná* (*RE*), jestliže existuje procedura (algoritmus, který nevyžaduje žádný vstup), která, je-li spuštěna, postupně vygeneruje všechny prvky množin A.

Příklad

Množina všech *důkazů* v dané axiomatické teorii T je rekurzívní.
Množina všech *sentencí dokazatelných v* T je rekurzívně spočetná.

Základní vlastnosti

Každá rekurzívní množina je rekurzívně spočetná, ale
naopak to neplatí: existují *RE* množiny, které rekurzívní nejsou.
Komplement rekurzívní množiny je opět rekurzívní množina.

Rekurzívní a rekurzívně spočetné množiny

Definice

Množina A (syntaktických objektů nebo přirozených čísel) je *rekurzívní*, jestliže existuje algoritmus, který rozhoduje o náležení do A.

Množina A je *rekurzívně spočetná* (*RE*), jestliže existuje procedura (algoritmus, který nevyžaduje žádný vstup), která, je-li spuštěna, postupně vygeneruje všechny prvky množin A.

Příklad

Množina všech *důkazů* v dané axiomatické teorii T je rekurzívní.
Množina všech *sentencí dokazatelných v* T je rekurzívně spočetná.

Základní vlastnosti

Každá rekurzívní množina je rekurzívně spočetná, ale naopak to neplatí: existují *RE* množiny, které rekurzívní nejsou.
Komplement rekurzívní množiny je opět rekurzívní množina.
Ale komplement *RE* množiny nemusí být *RE*.

Neúplnost

Platí

Ke každé *RE* množině A přirozených čísel existuje aritmetická formule $\varphi(x)$, která množinu A definuje v tom smyslu, že každé číslo n je v A přesně tehdy, když v PA (nebo v jakékoliv jiné dostatečně silné teorii) lze dokázat sentenci $\varphi(\overline{n})$:
$\forall n(n \in A \Leftrightarrow T \vdash \varphi(\overline{n}))$.

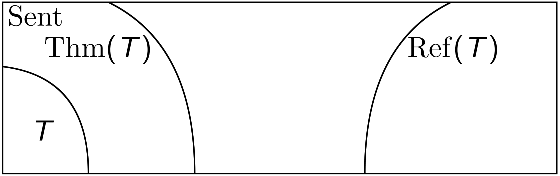
Neúplnost

Platí

Ke každé *RE* množině A přirozených čísel existuje aritmetická formule $\varphi(x)$, která množinu A definuje v tom smyslu, že každé číslo n je v A přesně tehdy, když v PA (nebo v jakékoliv jiné dostatečně silné teorii) lze dokázat sentenci $\varphi(\overline{n})$:
$\forall n(n \in A \Leftrightarrow T \vdash \varphi(\overline{n}))$.

Důsledek

Množina $\mathrm{Thm}(T)$ všech sentencí *dokazatelných* v T a množina $\mathrm{Ref}(T)$ všech sentencí *vyvratitelných* v T:



nemohou být navzájem komplementární.

Kurt Gödel: několik životopisných údajů

- Narozen 1906 (Wikipedia: Brün, Austria-Hungary).

Kurt Gödel: několik životopisných údajů

- Narozen 1906 (Wikipedia: Brün, Austria-Hungary).
- Maturoval 1924 a odešel studovat do Vídně.

Kurt Gödel: několik životopisných údajů

- Narozen 1906 (Wikipedia: Brün, Austria-Hungary).
- Maturoval 1924 a odešel studovat do Vídně.
- Volba rakouského občanství v roce 1929.

Kurt Gödel: několik životopisných údajů

- Narozen 1906 (Wikipedia: Brün, Austria-Hungary).
- Maturoval 1924 a odešel studovat do Vídně.
- Volba rakouského občanství v roce 1929.
- Od roku 1934 několik pobytů v USA (Institute for Advanced Study, University of Notre Dame), naposledy v zimě 38–39.

Kurt Gödel: několik životopisných údajů

- Narozen 1906 (Wikipedia: Brün, Austria-Hungary).
- Maturoval 1924 a odešel studovat do Vídně.
- Volba rakouského občanství v roce 1929.
- Od roku 1934 několik pobytů v USA (Institute for Advanced Study, University of Notre Dame), naposledy v zimě 38–39.
- Od března 1940, po dobrodružné cestě přes Sibiř, natrvalo v USA.

Filosofické souvislosti

Filosofické souvislosti

Podle mě spíš neexistují.

Literatura

- K. Gödel. Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls. *Monatsh. Math. Phys.*, 37:349–360, 1930.
- K. Gödel. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. *Monatsh. Math. Phys.*, 38:173–198, 1931.
- C. H. Papadimitriou. *Computational Complexity*. Addison-Wesley, 1994.
- M. Presburger. Über die Vollständigkeit eines gewissen Systems der Aritmetik ganzer Zahlen, in welchem die Addition als einzige Operation hervortritt. V *Comptes Rendus du I$^{\text{er}}$ Congrès des Mathématiciens des Pays Slaves*, str. 92–101, Warszawa, 1929.