5. lekce

De Morganovy zákony
Karnaughova mapa

Miroslav Jílek

De Morganovy zákony

De Morganovy zákony udávají duální vztahy
mezi konjunkcí a disjunkcí výroků tak, že použijeme negace.

De Morganovy zákony

De Morganovy zákony udávají duální vztahy
mezi konjunkcí a disjunkcí výroků tak, že použijeme negace.

$\wedge$ - konjunkce – AND *(a také, a zároveň)*
$\vee$ - disjunkce (OR) *(nebo)*

Negace konjunkce: $\neg (A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

Negace disjunkce : $\neg (A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

De Morganovy zákony

De Morganovy zákony udávají duální vztahy
mezi konjunkcí a disjunkcí výroků tak, že použijeme negace.

$\wedge$ - konjunkce – AND *(a také, a zároveň)*
$\vee$ - disjunkce (OR) *(nebo)*

Negace konjunkce: $\neg (A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
Negace disjunkce : $\neg (A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

Pro závorky s více podmínkami (písmeny):
$\neg (A \wedge B \wedge C) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B \vee \neg C$
$\neg (A \vee B \vee C) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$

De Morganovy zákony

De Morganovy zákony udávají duální vztahy
mezi konjunkcí a disjunkcí výroků tak, že použijeme negace.

$\wedge$ - konjunkce – AND *(a také, a zároveň)*
$\vee$ - disjunkce (OR) *(nebo)*

Negace konjunkce: $\neg (A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

Negace disjunkce : $\neg (A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

Pro závorky s více podmínkami (písmeny):

$\neg (A \wedge B \wedge C) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B \vee \neg C$

$\neg (A \vee B \vee C) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$

Pro více vnořených závorek:

$\neg (A \wedge \neg B \wedge (B \vee C \vee (\neg A \wedge \neg C))) \Leftrightarrow (\neg A \vee B \vee (\neg B \wedge \neg C \wedge (A \vee C)))$

Změníme konjunkce na disjunkce a naopak a jednotlivé podmínky (písmena) negujeme!

Logické operace implikace a ekvivalence musíme upravit

Pro počítačové zpracování můžeme použít logické spojky AND, OR, XOR a NOT

AND : pravda, když jsou pravda všechny výroky
OR : pravda, když je pravda alespoň jeden výrok
XOR : pravda, když všechny výroky nemají stejnou pravdivostní hodnotu
NOT : je pravda, když je výrok nepravda

Implikace

$$\mathbf{A \Rightarrow B \;=\; A\ OR\ \neg B}$$

Ekvivalence

A ⇔ B = NOT A XOR B *a také* **A XOR NOT B**

Příklad 1

Vyřešte pomocí konjunkcí (AND) a disjunkcí (OR): $\neg (A \land B) \Leftrightarrow \neg C$

$\neg (A \wedge B) \Leftrightarrow \neg C$

A	B	C	$(A \wedge B)$	$\neg (A \wedge B)$	$\neg C$	$\neg (A \wedge B) \Leftrightarrow \neg C$
0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0
1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	0	0	1

$\neg (A \wedge B)$ logicky ekvivalentní $\neg A \vee \neg B$ *(De Morganův zákon)*
$(X \Leftrightarrow Y)$ logicky ekvivalentní $(X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg Y)$ *(Aplikace formule)*

$(X \wedge Y)$: $((\neg A \vee \neg B) \wedge \neg C)$
$(\neg X \wedge \neg Y)$: $(A \wedge B \wedge C)$
$\neg (A \wedge B) \Leftrightarrow \neg C$ logicky ekvivalentní $((\neg A \vee \neg B) \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C)$

Roznásobení : ***$((X \vee Y) \wedge Z)$: $(X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z)$***
$((X \wedge Y) \vee Z)$: $(X \vee Z) \wedge (Y \vee Z)$

$((\neg A \vee \neg B) \wedge \neg C)$: $(\neg A \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge \neg C)$ *(aplikace roznásobení – C násobíme každý prvek závorky)*
$(A \wedge B \wedge C)$: $(A \wedge B \wedge C)$ *bude stejné*
Celkově: $(\neg A \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C)$
Platí : $(X \wedge Y)$ logicky ekvivalentní $(X \wedge Y \wedge Z) \vee (X \wedge Y \wedge \neg Z)$ protože nezáleží na Z!

$(\neg A \wedge \neg C)$: $(\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$ *(aplikace formule, nezáleží na B)*
$(\neg B \wedge \neg C)$: $(A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$ *(aplikace formule, nezáleží na A)*

$(A \wedge B \wedge C)$: $(A \wedge B \wedge C)$ *zůstane stejné*

Celkový výsledek: $\mathbf{(\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C)}$
(to jsou jedničky v tabulce)

A	B	C	$(A \wedge B)$	$\neg (A \wedge B)$	$\neg C$	$\neg (A \wedge B) \Leftrightarrow \neg C$	Výsledek
0	0	0	0	1	1	1	$\mathbf{(\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)}$
0	0	1	0	1	0	0	
0	1	0	0	1	1	1	$\mathbf{(\neg A \wedge B \wedge \neg C)}$
0	1	1	0	1	0	0	
1	0	0	0	1	1	1	$\mathbf{(A \wedge \neg B \wedge \neg C)}$
1	0	1	0	1	0	0	
1	1	0	1	0	1	0	
1	1	1	1	0	0	1	$\mathbf{(A \wedge B \wedge C)}$

Příklad 2:

Vyřešte pomocí konjunkcí (AND) a disjunkcí (OR): $\neg (A \Rightarrow B) \vee (A \Leftrightarrow C)$

$\neg(A \Rightarrow B) \vee (A \Leftrightarrow C)$

A	B	C	$(A \Rightarrow B)$	$\neg(A \Rightarrow B)$	$A \Leftrightarrow C$	$\neg(A \Rightarrow B) \vee (A \Leftrightarrow C)$
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	0	1	1

$(X \Rightarrow Y)$ logicky ekvivalentní $(\neg X \vee Y)$
$(X \Leftrightarrow Y)$ logicky ekvivalentní $(X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg Y)$

První část: $\neg(A \Rightarrow B)$: $\neg(\neg A \vee B)$
Druhá část: $(A \Leftrightarrow C)$: $(A \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg C)$

Celkově: $\neg(\neg A \vee B) \vee (A \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg C)$

podle De Morganova zákona platí že: $\neg(\neg A \vee B)$ je logicky ekvivalentní $(A \wedge \neg B)$, potom:
$\mathbf{(A \wedge \neg B) \vee (A \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg C)}$

... doplníme všechny výroky (písmenka) do všech tří závorek:

$(A \wedge \neg B)$: *je logicky ekvivalentní* $(A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C)$ *protože na v původním spojení na C nezáleží*
$(A \wedge C)$: $(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C)$
$(\neg A \wedge \neg C)$: $(\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$

Celkový výsledek :

$$(A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$$

... první se opakuje, proto ho odstraníme (budeme ignorovat) ...

$$\mathbf{(A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)}$$

A	B	C	$(A \Rightarrow B)$	$\neg (A \Rightarrow B)$	$A \Leftrightarrow C$	$\neg (A \Rightarrow B) \vee (A \Leftrightarrow C)$	Výsledek
0	0	0	1	0	1	1	$\mathbf{(\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)}$
0	0	1	1	0	0	0	
0	1	0	1	0	1	1	$\mathbf{(\neg A \wedge B \wedge \neg C)}$
0	1	1	1	0	0	0	
1	0	0	0	1	0	1	$\mathbf{(A \wedge \neg B \wedge \neg C)}$
1	0	1	0	1	1	1	$\mathbf{(A \wedge \neg B \wedge C)}$
1	1	0	1	0	0	0	
1	1	1	1	0	1	1	$\mathbf{(A \wedge B \wedge C)}$

Příklad 3 :

Vyřešte pomocí konjunkcí (AND) a disjunkcí (OR): $\neg (A \wedge B) \Rightarrow (C \Rightarrow \neg A)$

$\neg(A \wedge B) \Rightarrow (C \Rightarrow \neg A)$

A	B	C	$(A \wedge B)$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$C \Rightarrow \neg A$	$\neg(A \wedge B) \Rightarrow (C \Rightarrow \neg A)$
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	1	0	1	0	1

$\neg(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})$ *je logicky ekvivalentní* $(\neg\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{B})$

Pravdivostní tabulka implikace

A	C	$\neg A$	$\neg C$	$C \Rightarrow \neg A$	$\neg C \vee \neg A$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	0	0

$(\mathbf{C} \Rightarrow \neg\mathbf{A})$ *je logicky ekvivalentní* $(\neg\mathbf{C} \vee \neg\mathbf{A})$
$(\neg\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{B}) \Rightarrow (\neg\mathbf{C} \vee \neg\mathbf{A})$ *je logicky ekvivalentní* $\neg(\neg\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{B}) \vee (\neg\mathbf{C} \vee \neg\mathbf{A})$
$\neg(\neg\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{B})$ *je logicky ekvivalentní* $(\neg\neg\mathbf{A} \wedge \neg\neg\mathbf{B})$ *je logicky ekvivalentní* $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})$
$(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \vee (\neg\mathbf{C} \vee \neg\mathbf{A})$ *je logicky ekvivalentní* $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \vee \neg\mathbf{C} \vee \neg\mathbf{A}$

... doplníme zbylé podmínky do všech tří partikulárních podmínek :

$(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})$ *je logicky ekvivalentní* $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) \vee (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \wedge \neg\mathbf{C})$

$\neg\mathbf{C}$ *je logicky ekvivalentní.* $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \wedge \neg\mathbf{C}) \vee (\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B} \wedge \neg\mathbf{C}) \vee (\neg\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \wedge \neg\mathbf{C}) \vee (\neg\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B} \wedge \neg\mathbf{C})$

$\neg\mathbf{A}$ *je logicky ekvivalentní.* $(\neg\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) \vee (\neg\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \wedge \neg\mathbf{C}) \vee (\neg\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) \vee (\neg\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B} \wedge \neg\mathbf{C})$

Celkový výsledek:

$(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) \vee (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \wedge \neg\mathbf{C}) \vee (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \wedge \neg\mathbf{C}) \vee (\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B} \wedge \neg\mathbf{C}) \vee (\neg\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \wedge \neg\mathbf{C})$
$\vee (\neg\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B} \wedge \neg\mathbf{C}) \vee (\neg\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) \vee (\neg\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \wedge \neg\mathbf{C}) \vee (\neg\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) \vee (\neg\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B} \wedge \neg\mathbf{C})$

...smažeme duplikáty:

$(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) \vee (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \wedge \neg\mathbf{C}) \vee (\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B} \wedge \neg\mathbf{C}) \vee (\neg\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \wedge \neg\mathbf{C}) \vee (\neg\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B} \wedge \neg\mathbf{C}) \vee (\neg\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) \vee (\neg\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B} \wedge \mathbf{C})$

A	B	C	$(A \wedge B)$	$\neg (A \wedge B)$	$\neg A$	$C \Rightarrow \neg A$	$\neg (A \wedge B) \Rightarrow (C \Rightarrow \neg A)$	Výsledek
0	0	0	0	1	1	1	1	$(\neg\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B} \wedge \neg\mathbf{C})$
0	0	1	0	1	1	1	1	$(\neg\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B} \wedge \mathbf{C})$
0	1	0	0	1	1	1	1	$(\neg\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \wedge \neg\mathbf{C})$
0	1	1	0	1	1	1	1	$(\neg\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \wedge \mathbf{C})$
1	0	0	0	1	0	1	1	$(\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B} \wedge \neg\mathbf{C})$
1	0	1	0	1	0	0	0	
1	1	0	1	0	0	1	1	$(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \wedge \neg\mathbf{C})$
1	1	1	1	0	1	0	1	$(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \wedge \mathbf{C})$

Příklad 4:

Vyřešte pomocí konjunkcí (AND) a disjunkcí (OR):

$$((A \Leftrightarrow B) \Rightarrow C) \wedge ((D \Rightarrow C) \vee (A \wedge \neg B)) \wedge (\neg D \Leftrightarrow (A \Rightarrow B))$$

$((A \Leftrightarrow B) \Rightarrow C) \wedge ((D \Rightarrow C) \vee (A \wedge \neg B)) \wedge (\neg D \Leftrightarrow (A \Rightarrow B))$

A	B	C	D	$A\Leftrightarrow B$	$(A\Leftrightarrow B)\Rightarrow C$	$D\Rightarrow C$	$A\wedge\neg B$	$(D\Rightarrow C)\vee(A\wedge\neg B)$	$A\Rightarrow B$	$\neg D\Leftrightarrow(A\Rightarrow B)$	**Výsledek** vše $\wedge$
0	0	0	0	1	**0**	1	0	**1**	1	**1**	0
0	0	0	1	1	**0**	0	0	**0**	1	**0**	0
0	0	1	0	1	**1**	1	0	**1**	1	**1**	1
0	0	1	1	1	**1**	1	0	**1**	1	**0**	0
0	1	0	0	0	**1**	1	0	**1**	1	**1**	1
0	1	0	1	0	**1**	0	0	**0**	1	**0**	0
0	1	1	0	0	**1**	1	0	**1**	1	**1**	1
0	1	1	1	0	**1**	1	0	**1**	1	**0**	0
1	0	0	0	0	**1**	1	1	**1**	0	**0**	0
1	0	0	1	0	**1**	0	1	**1**	0	**1**	1
1	0	1	0	0	**1**	1	1	**1**	0	**0**	0
1	0	1	1	0	**1**	1	1	**1**	0	**1**	1
1	1	0	0	1	**0**	1	0	**1**	1	**1**	0
1	1	0	1	1	**0**	0	0	**0**	1	**0**	0
1	1	1	0	1	**1**	1	0	**1**	1	**1**	1
1	1	1	1	1	**1**	1	0	**1**	1	**0**	0

Řešení:

$((A \Leftrightarrow B) \Rightarrow C) \wedge ((D \Rightarrow C) \vee (A \wedge \neg B)) \wedge (\neg D \Leftrightarrow (A \Rightarrow B))$

$(A\Leftrightarrow B)$ $(A\wedge B)\vee(\neg A\wedge\neg B)$

$(A\Leftrightarrow B)\Rightarrow C$ $\neg((A\wedge B)\vee(\neg A\wedge\neg B))\vee C$; $(\neg(A\wedge B)\wedge\neg(\neg A\wedge\neg B))\vee C$;
$((\neg A\vee\neg B)\wedge(A\vee B))\vee C$;
roznásobení závorky: $((\neg A\wedge A)\vee(\neg B\wedge A)\vee(\neg A\wedge B)\vee(\neg B\wedge B))\vee C$
odstraníme kontradikce (vše co nikdy nemůže být), odstraníme () a seřadíme podmínky: $\mathbf{(A\wedge\neg B)\vee(\neg A\wedge B)\vee C}$

$D\Rightarrow C$ $\neg D\vee C$

$(D\Rightarrow C)\vee(A\wedge\neg B)$ $(\neg D\vee C)\vee(A\wedge\neg B)$; *odstraníme závorky u nebo a seřadíme podmínky:* $\mathbf{(A\wedge\neg B)\vee C\vee\neg D}$

$A \Rightarrow B$ $\neg A\vee B$

$\neg D \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$ $(\neg D\wedge(\neg A\vee B))\vee(\neg\neg D\wedge\neg(\neg A\vee B))$; $(\neg D\wedge(\neg A\vee B))\vee(D\wedge(\neg\neg A\wedge\neg B))$ upravíme:
$(\neg D\wedge(\neg A\vee B))\vee(D\wedge(A\wedge\neg B))$ … a *roznásobíme závorky:*
POZOR! Roznásobuje se pouze tam, kde jsou rozdílné spojky, kde jsou shodné, pouze se odstraní závorky!!!
$((\neg D\wedge\neg A)\vee(\neg D\wedge B))\vee(D\wedge A\wedge\neg B)$
odstraníme závorky a seřadíme podmínky: $\mathbf{(\neg A\wedge\neg D)\vee(B\wedge\neg D)\vee(A\wedge\neg B\wedge D)}$

Vše složíme: $((A\wedge\neg B)\vee(\neg A\wedge B)\vee C)\wedge((A\wedge\neg B)\vee C\vee\neg D)\wedge((\neg A\wedge\neg D)\vee(B\wedge\neg D)\vee(A\wedge\neg B\wedge D))$

Abychom převedli na disjunktivní tvar, musíme udělat negaci negace:

$\neg\neg(((A\wedge\neg B)\vee(\neg A\wedge B)\vee C)\wedge((A\wedge\neg B)\vee C\vee\neg D)\wedge((\neg A\wedge\neg D)\vee(B\wedge\neg D)\vee(A\wedge\neg B\wedge D)))$

jednu negaci aplikujeme na závorku podle De Morganova zákona:

$\neg(\neg((A\wedge\neg B)\vee(\neg A\wedge B)\vee C)\vee\neg((A\wedge\neg B)\vee C\vee\neg D)\vee\neg((\neg A\wedge\neg D)\vee(B\wedge\neg D)\vee(A\wedge\neg B\wedge D)))$

... a dále pokračujeme aplikací De Morganova zákona

$\neg((\neg(A\wedge\neg B)\wedge\neg(\neg A\wedge B)\wedge\neg C)\vee(\neg(A\wedge\neg B)\wedge\neg C\wedge\neg\neg D)\vee(\neg(\neg A\wedge\neg D)\wedge\neg(B\wedge\neg D)\wedge\neg(A\wedge\neg B\wedge D)))$

... a dále ještě aplikujeme De Morganův zákon:

$\neg(((\neg A\vee\neg\neg B)\wedge(\neg\neg A\vee\neg B)\wedge\neg C)\vee((\neg A\vee\neg\neg B)\wedge\neg C\wedge D)\vee((\neg\neg A\vee\neg\neg D)\wedge(\neg B\vee\neg\neg D)\wedge(\neg A\vee\neg\neg B\vee\neg D)))$

upravíme dvojité negace:

$\neg(((\neg A\vee B)\wedge(A\vee\neg B)\wedge\neg C)\vee((\neg A\vee B)\wedge\neg C\wedge D)\vee((A\vee D)\wedge(\neg B\vee D)\wedge(\neg A\vee B\vee\neg D)))$

Teď budeme řešit po částech:

První část:

... roznásobíme závorky:

$((\neg A\vee B)\wedge(A\vee\neg B)\wedge\neg C)$: $(\neg A\wedge A\wedge\neg C)\vee(A\wedge B\wedge\neg C)\vee(\neg A\wedge\neg B\wedge\neg C)\vee(B\wedge\neg B\wedge\neg C)$

... odstraníme kontradikce:

$((A\wedge B\wedge\neg C)\vee(\neg A\wedge\neg B\wedge\neg C))$

...doplníme chybějící podmínky (písmena):

$\mathbf{((A\wedge B\wedge\neg C\wedge D)\vee(A\wedge B\wedge\neg C\wedge\neg D)\vee(\neg A\wedge\neg B\wedge\neg C\wedge D)\vee(\neg A\wedge\neg B\wedge\neg C\wedge\neg D))}$

Druhá část:

$((\neg A \lor B) \land \neg C \land D)$: $((\neg A \land \neg C \land D) \lor (B \land \neg C \land D))$

...doplníme chybějící podmínky (písmena):

$$\mathbf{((\neg A \land B \land \neg C \land D) \lor (\neg A \land B \land \neg C \land D) \lor (A \land B \land \neg C \land D) \lor (\neg A \land B \land \neg C \land D))}$$

Třetí část:

$((A \lor D) \land (\neg B \lor D) \land (\neg A \lor B \lor \neg D))$:

$$((A \land \neg B \land \neg A) \lor (A \land \neg B \land B) \lor (A \land \neg B \land \neg D) \lor (A \land D \land \neg A) \lor (A \land D \land B) \lor (A \land D \land \neg D) \lor (D \land \neg B \land \neg A) \lor (D \land \neg B \land B) \lor (D \land \neg B \land \neg D) \lor (D \land D \land \neg A) \lor (D \land D \land B) \lor (D \land D \land \neg D)$$

... odstraníme kontradikce a zdvojené podmínky (písmena):

$$((A \land \neg B \land \neg D) \lor (A \land D \land B) \lor (D \land \neg B \land \neg A) \lor (D \land \neg A) \lor (D \land B))$$

... seřadíme podmínky (písmena):

$$((A \land \neg B \land \neg D) \lor (A \land B \land D) \lor (\neg A \land \neg B \land D) \lor (\neg A \land D) \lor (B \land D))$$

...doplníme chybějící podmínky (písmena):

$$\mathbf{((A \land \neg B \land C \land \neg D) \lor (A \land \neg B \land \neg C \land \neg D) \lor (A \land B \land C \land D) \lor (A \land B \land \neg C \land D) \lor (\neg A \land \neg B \land C \land D) \lor (\neg A \land \neg B \land \neg C \land D) \lor (\neg A \land B \land C \land D) \lor (\neg A \land B \land \neg C \land D) \lor (\neg A \land \neg B \land C \land D) \lor (\neg A \land \neg B \land \neg C \land D) \lor (A \land B \land C \land D) \lor (A \land B \land \neg C \land D) \lor (\neg A \land B \land C \land D) \lor (\neg A \land B \land \neg C \land D))}$$

Nyní spojíme všechny tři části:

... spojíme tři partikulární výsledky a pozor, před hlavní závorkou bude negace:

$$\mathbf{\neg(((A \land B \land \neg C \land D) \lor (A \land B \land \neg C \land \neg D) \lor (\neg A \land \neg B \land \neg C \land D) \lor (\neg A \land \neg B \land \neg C \land \neg D)) \lor ((\neg A \land B \land \neg C \land D) \lor (\neg A \land B \land \neg C \land D) \lor (A \land B \land \neg C \land D) \lor (\neg A \land B \land \neg C \land D)) \lor ((A \land \neg B \land C \land \neg D) \lor (A \land \neg B \land \neg C \land \neg D) \lor (A \land B \land C \land D) \lor (A \land B \land \neg C \land D) \lor (\neg A \land \neg B \land C \land D) \lor (\neg A \land \neg B \land \neg C \land D) \lor (\neg A \land B \land C \land D) \lor (\neg A \land B \land \neg C \land D) \lor (\neg A \land \neg B \land C \land D) \lor (\neg A \land \neg B \land \neg C \land D) \lor (A \land B \land C \land D) \lor (A \land B \land \neg C \land D) \lor (\neg A \land B \land C \land D) \lor (\neg A \land B \land \neg C \land D)))}$$

...odstraníme duplicitní výrazy a nepotřebné závorky:

$\neg((A\wedge B\wedge\neg C\wedge D)\vee(A\wedge B\wedge\neg C\wedge\neg D)\vee(\neg A\wedge\neg B\wedge\neg C\wedge D)\vee(\neg A\wedge\neg B\wedge\neg C\wedge\neg D)\vee(\neg A\wedge B\wedge\neg C\wedge D)\vee$
$(A\wedge\neg B\wedge C\wedge\neg D)\vee(A\wedge\neg B\wedge\neg C\wedge\neg D)\vee(A\wedge B\wedge C\wedge D)\vee(\neg A\wedge\neg B\wedge C\wedge D)\vee(\neg A\wedge B\wedge C\wedge D))$

Protože je všechno v negaci, je výsledek všude tam, kde jsou v pravdivostní tabulce nuly (deset řádků s nulami). Pokud chceme, aby výrazy byly tam, kde jsou v pravdivostní tabulce jedničky, potom budou výsledkem všechny kombinace, které se ve výrazu nevyskytují:

$\mathbf{(\neg A\wedge\neg B\wedge C\wedge\neg D)\vee(\neg A\wedge B\wedge\neg C\wedge\neg D)\vee(\neg A\wedge B\wedge C\wedge\neg D)\vee(A\wedge\neg B\wedge\neg C\wedge D)\vee(A\wedge\neg B\wedge C\wedge D)\vee(A\wedge B\wedge C\wedge\neg D)}$

((A ⇔ B) ⇒ C) ∧ ((D ⇒ C) ∨ (A ∧ ¬B)) ∧ (¬D ⇔ (A ⇒ B))

je ekvivalentní

(¬A∧¬B∧C∧¬D)∨(¬A∧B∧¬ C∧¬D)∨(¬A∧B∧C∧¬D)∨(A∧¬B∧¬ C∧D)∨(A∧¬B∧ C∧D)∨ (A∧B∧C∧¬D)

A	B	C	D	A⇔B	(A⇔B)⇒C	D⇒C	A∧¬B	(D⇒C)∨(A∧¬B)	A⇒B	¬D⇔(A⇒B)	**Výsledek vše ∧**	**Výsledek (1)**
0	0	0	0	1	**0**	1	0	**1**	1	**1**	0	
0	0	0	1	1	**0**	0	0	**0**	1	**0**	0	
0	0	1	0	1	**1**	1	0	**1**	1	**1**	1	**(¬A∧¬B∧C∧¬D)**
0	0	1	1	1	**1**	1	0	**1**	1	**0**	0	
0	1	0	0	0	**1**	1	0	**1**	1	**1**	1	**(¬A∧B∧¬ C∧¬D)**
0	1	0	1	0	**1**	0	0	**0**	1	**0**	0	
0	1	1	0	0	**1**	1	0	**1**	1	**1**	1	**(¬A∧B∧C∧¬D)**
0	1	1	1	0	**1**	1	0	**1**	1	**0**	0	
1	0	0	0	0	**1**	1	1	**1**	0	**0**	0	
1	0	0	1	0	**1**	0	1	**1**	0	**1**	1	**(A∧¬B∧¬ C∧D)**
1	0	1	0	0	**1**	1	1	**1**	0	**0**	0	
1	0	1	1	0	**1**	1	1	**1**	0	**1**	1	**(A∧¬B∧ C∧D)**
1	1	0	0	1	**0**	1	0	**1**	1	**1**	0	
1	1	0	1	1	**0**	0	0	**0**	1	**0**	0	
1	1	1	0	1	**1**	1	0	**1**	1	**1**	1	**(A∧B∧C∧¬D)**
1	1	1	1	1	**1**	1	0	**1**	1	**0**	0	