6. lekce

Karnaughova mapa

Miroslav Jílek

Karnaughova mapa

Karnaughova mapa nám pomůže vytvořit zjednodušenou pravdivostní funkci a nemusíme dělat pravdivostní tabulku!

Příklad: $\neg (A \Rightarrow B) \vee (A \Leftrightarrow C)$

V pravdivostní tabulce bude:

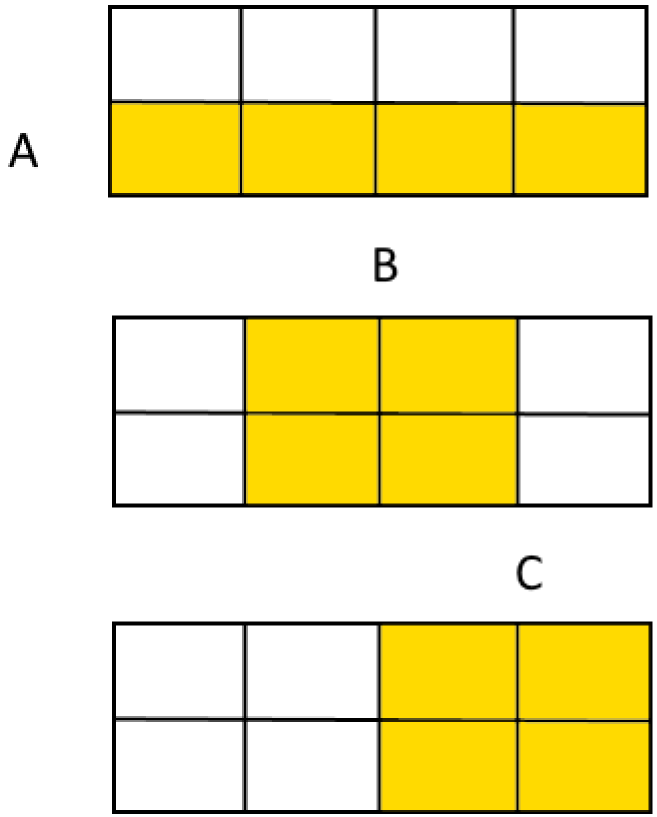
A	B	C	$(A \Rightarrow B)$	$\neg (A \Rightarrow B)$	$(A \Leftrightarrow C)$	$\neg (A \Rightarrow B) \vee (A \Leftrightarrow C)$
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	0	1	1

Výsledek z pravdivostní tabulky bude:

$$(\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge C)$$

Vytvoříme tabulku, která obsahuje tolik buněk, kolik má funkce výsledků (pravdivostní tabulka řádků). V našem případě to je 8 řádků, naše tabulka bude mít 2 x 4 buňky. Každá podmínka bude mít 4 buňky – A bude na prvním řádku, B bude čtverec uprostřed a C bude čtverec vpravo.

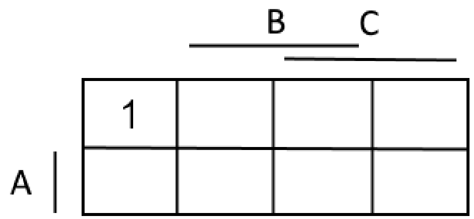
Princip rozmístění buněk pro A, B a C je takový, aby se sousedi každé buňky lišili od této buňky o právě jednu podmínku (0/1). V každé buňce je průnik všech tří podmínek!



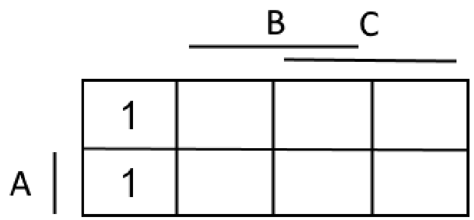
A tabulku začneme vyplňovat:

Do jednotlivých buněk vyplňujeme jedničky nebo nuly, to na základě jednotlivých řádků z pravdivostní tabulky.

První řádek / první sloupec pravdivostní tabulky: A, B i C jsou nuly – pravdivostní hodnota je v tabulce je true – zapíšeme do buňky jedničku (v této buňce A i B i C jsou nuly – v buňce není A, není B a není C):



Druhý řádek / první sloupec: A je jednička, B a C jsou nuly – pravdivostní hodnota v tabulce je true – zapíšeme do buňky 1:



První řádek / druhý sloupec: 010, pravdivostní hodnota je 1

			B	C
	1	1		
A	1			

… tímto systémem pokračujeme pro zbylé buňky – doplníme nuly a jedničky do celé Karnaughovy tabulky:

			B	C
	1	1	0	0
A	1	0	1	1

Sousední jedničky v tabulce spojíme do skupin tvořících čtyřúhelník

- spojování do skupin děláme vertikálně nebo horizontálně, ne diagonálně - čtyřúhelník musí být pravoúhlý.
- jedničky označíme do skupin o velikosti 2^n, n>=0 (1,2,4,8,16,...).
- Pozor: můžeme spojovat buňky horního a spodního okraje tabulky a levého a pravého okraje tabulky (jako kdyby tabulka tvořila válec a krajní řada či sloupec byly navzájem sousední!
- V každé nové skupině musí být alespoň jedna ještě neoznačená jednička, ve skupině mohou být i už označené jedničky.
- Nejprve začínáme u největší skupiny 2^n a po označení všech možných takových skupin pokračuje u skupiny nižší 2^(n -1).
- Cílem je označení všech jedniček do co nejmenšího počtu skupin!

V našem případě budeme vytvářet dvojice. Pozor, sousední buňky jsou také první a poslední sloupec a první a poslední řádek (zelená skupina).

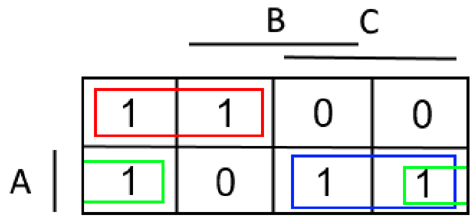
B C

	1	1	0	0
A	1	0	1	1

Po vytvoření třetí skupiny máme použité všechny jedničky. Nemusíme proto vytvořit další dvojici!

Z jednotlivých skupin zapíšeme pouze ty podmínky, které se v dané skupině nemění – v obou (všech) buňkách mají stejnou hodnotu: např. V červené skupině je A i C vždy false a proto ji použijeme ve výsledku s negací, B se mění a proto nebude použita ve výsledku červené skupiny!

V případě, že je v celé označené skupině daná podmínka jedničková, pak bude ve výsledné funkci přímo hodnota této podmínky. V případě, že bude v celé označené skupině daná podmínka nulová, pak bude ve výsledné funkci její negace – např. V červené skupině bude negované C!



Červená skupina:

notA && notC (v obou buňkách je A i C nula!)

B nemá konstantní pravdivostní hodnotu (0,1) a proto nebude použita!

Zelená skupina:

A && notB (v obou buňkách je A jednička a B nula!)

C nemá konstantní pravdivostní hodnotu (0,1) a proto nebude použita!

Modrá skupina:

A && C (v obou buňkách je A i C jednička!)

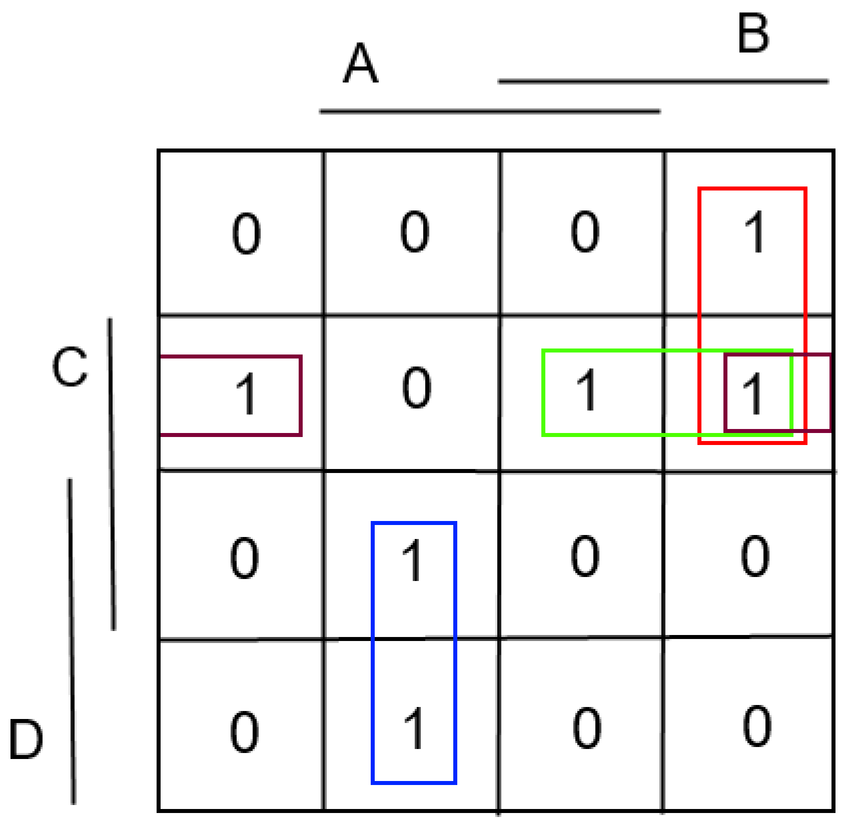
Mezi výsledky jednotlivých skupiny zapíšeme OR: $\mathbf{(\neg A \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B) \vee (A \wedge C)}$

Výsledek z pravdivostní tabulky:

$\mathbf{(\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge C)}$

Příklad : $((A \Leftrightarrow B) \Rightarrow C) \wedge ((D \Rightarrow C) \vee (A \wedge \neg B)) \wedge (\neg D \Leftrightarrow (A \Rightarrow B))$

A	B	C	D	Výsledek
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0



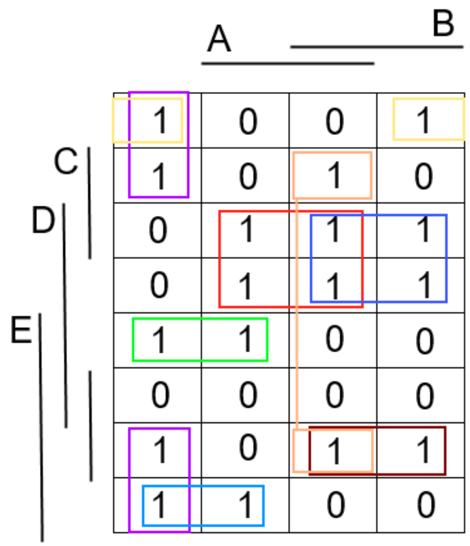
Do výsledku zapíšeme podmínky, které se nemění (podmínka je ve všech boxech konstantní):

Výsledek: $(\neg A \wedge B \wedge \neg D) \vee (B \wedge C \wedge \neg D) \vee (A \wedge \neg B \wedge D) \vee (\neg A \wedge C \neg D)$

V pravdivostní tabulce jsme měli šest výsledků, v Karnaughově mapě jenom čtyři!!! A logický výsledek je stejný!

A	B	C	D	E	Výsledek
0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0
1	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0
1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0
1	1	0	1	0	1
1	1	0	1	1	0
1	1	1	0	0	1
1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	0

V tomto případě nejsou definované logické spojky podmínek (výroků). Známe jenom výsledky (např. Potřebujeme najít podmínky pro takový výsledek...



Výsledek:

$$(\neg A \wedge \neg B \wedge \neg D) \vee (A \wedge D \wedge \neg E) \vee (B \wedge D \wedge \neg E) \vee$$
$$(\neg A \wedge \neg C \wedge \neg D \wedge \neg E) \vee (A \wedge B \wedge C \wedge \neg D) \vee (\neg B \wedge \neg C \wedge \neg D \wedge E) \vee$$
$$(B \wedge C \wedge \neg D \wedge E) \vee (\neg B \wedge \neg C \wedge D \wedge E)$$

V případě, že je 5 podmínek, vytvoříme tabulku 4 x 8 na stojato.
Dvojice lze také vytvořit ze zrcadlových řádků a sloupců.
V našem případě je to světle hnědá dvojice jedniček.
Není důležité, jestli vytváříme dvojice nebo čtveřice. Důležité je, abychom vytvořili co nejméně objektů (dvojic a čtveřic).

Řešte příklad : $(A \vee B') \Leftrightarrow A'$

Řešte příklad : $(A \vee B') \Leftrightarrow A'$

Vytvoříme pravdivostní tabulku:

A	B	A'	B'	$A \vee B'$	$(A \vee B') \Leftrightarrow A'$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0
1	1	0	0	1	0

Řešte příklad : **$(A \vee B') \Leftrightarrow A'$**

Vytvoříme pravdivostní tabulku:

A	B	A'	B'	A∨ B'	**(A ∨ B ') ⇔ A'**
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0
1	1	0	0	1	0

Karnaughova mapa:

		B
	$\boxed{1}$	0
A	0	0

Zde můžeme vytvořit skupinu o 2^0 prvcích - tedy jednoprvkovou skupinu.
V ní je **A = false a B = false,** výsledek proto bude: **$A' \wedge B'$**

Řešte příklad : $(A' \wedge B) \Rightarrow (C \vee B')$

Řešte příklad : **$(A' \wedge B) \Rightarrow (C \vee B')$**

Vytvoříme pravdivostní tabulku:

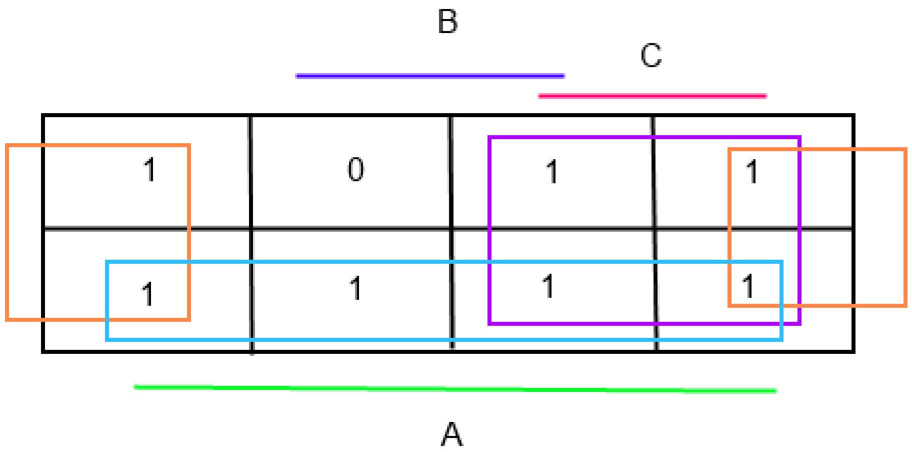
A	B	C	A'	B'	$A' \wedge B$	$C \vee B'$	$(A' \wedge B) \Rightarrow (C \vee B')$
0	0	0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0	0	1
1	1	1	0	0	0	1	1

Řešte příklad : **$(A' \wedge B) \Rightarrow (C \vee B')$**

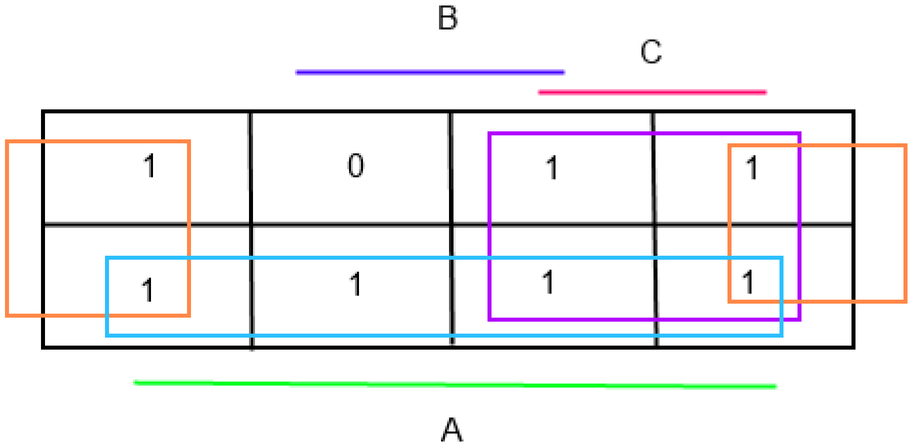
Vytvoříme pravdivostní tabulku:

A	B	C	A'	B'	A'∧B	C ∨B'	(A'∧ B) ⇒ (C∨ B')
0	0	0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0	0	1
1	1	1	0	0	0	1	1

Karnaughova mapa:



Z Karnaughovy mapy určíme podmínky pro jedničky:



Řešíme skupiny jedniček:

fialová skupina:	C	*(jenom C se nemění – je vždy true)*
modrá skupina:	A	*(jenom A se nemění – je vždy true)*
oranžová skupina:	Not B	*(jenom B se nemění – je vždy false)*

Výsledek je **Y = A Or Not B Or C** *to je také* $\mathbf{(A \lor B' \lor C)}$

Můžeme také řešit pro nuly – existuje jedna skupina:
Not (Not A And B And Not C) to je také $\mathbf{(A' \land B \land C')'}$

A podle De Morganova zákona vidíme, že platí: $\mathbf{(A \lor B' \lor C) \Leftrightarrow (A' \land B \land C')'}$

Řešte příklad – ten je zadán pravdivostní tabulkou, nemáme ale vstupní podmínky

(může to být například výsledek testování čtyř událostí)

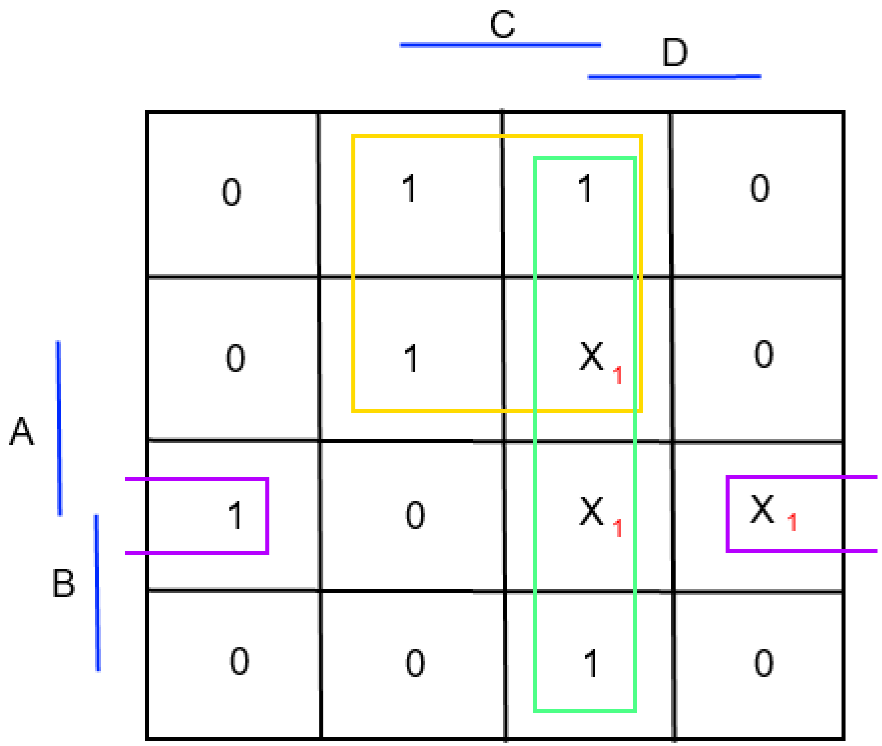
A	B	C	D	Y
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	X
1	1	0	0	1
1	1	0	1	X
1	1	1	0	0
1	1	1	1	X

X – taková situace (kombinace pravdivostních hodnot A, B, C a D) nemůže nikdy nastat a proto není důležité, jaká je!

Řešte příklad – ten je zadán pravdivostní tabulkou, nemáme ale vstupní podmínky

(může to být například výsledek testování čtyř událostí)

A	B	C	D	Y
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	X
1	1	0	0	1
1	1	0	1	X
1	1	1	0	0
1	1	1	1	X

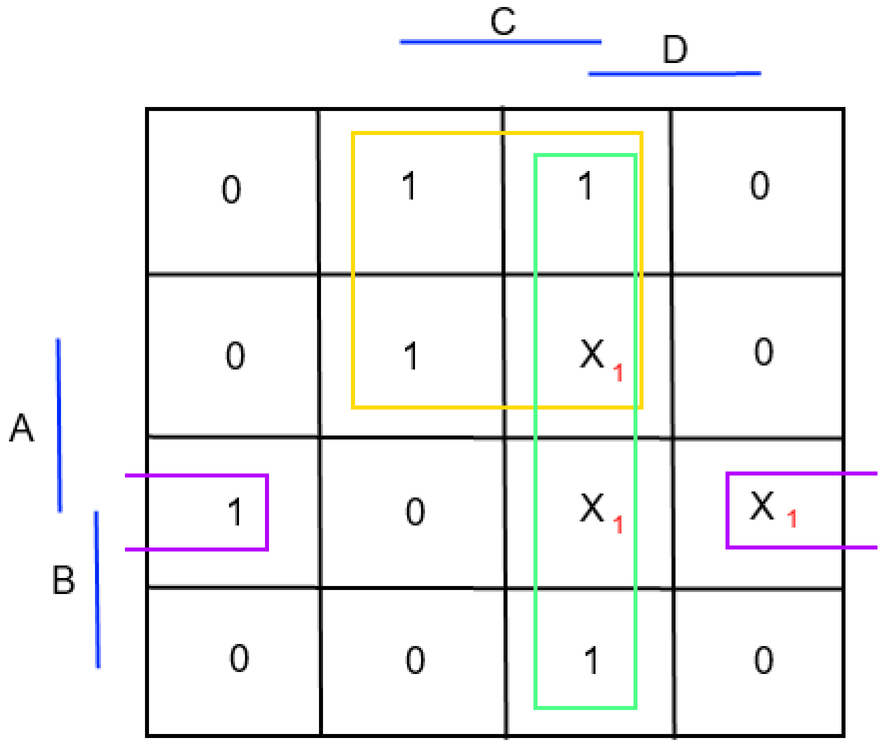


X – taková situace (kombinace pravdivostních hodnot A, B, C a D) nemůže nikdy nastat a proto není důležité, jaká je!
V Karnaughově mapě si můžeme libovolně, podle potřeby, dosadit 0 nebo 1, nemusí být vždy stejné!

Řešte příklad – ten je zadán pravdivostní tabulkou, nemáme ale vstupní podmínky

(může to být například výsledek testování čtyř událostí)

A	B	C	D	Y
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	X
1	1	0	0	1
1	1	0	1	X
1	1	1	0	0
1	1	1	1	X



Žlutá: **Not B And C**
Zelená: **C And D**
Fialová: **A And B And Not C**

Celekm: $(B'\wedge C)\vee(C\wedge D)\vee(A\wedge B\wedge C')$

X – taková situace (kombinace pravdivostních hodnot A, B, C a D) nemůže nikdy nastat a proto není důležité, jaká je!
V Karnaughově mapě si můžeme libovolně, podle potřeby, dosadit 0 nebo 1, nemusí být vždy stejné!