04 – Řešení soustavy lineárních rovnic

Miroslav Jílek

04 – Řešení soustavy lineárních rovnic

Máme dvě lineární rovnice ve tvaru

$$a \cdot x + b \cdot y = c$$
$$d \cdot x + e \cdot y = f$$

Řešení je uspořádaná dvojice čísel

{[x,y]}	$1 \cdot x + 2 \cdot y = 5$	$3 \cdot x - 1 \cdot y = 1$

Řešením může také být:

{[R,y]}	$0 \cdot x + 2 \cdot y = 4$	$0 \cdot x + 3 \cdot y = 6$
{[x,R]}	$2 \cdot x + 0 \cdot y = 4$	$3 \cdot x + 0 \cdot y = 6$
{[R,R]}	$0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$	$0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$
{[R,f(x)]}	$1 \cdot x + 2 \cdot y = 6$	$3 \cdot x + 6 \cdot y = 18$
∅	$1 \cdot x + 2 \cdot y = 5$	$1 \cdot x + 2 \cdot y = 6$

Metody matematického řešení:

a) substituce - z jedné rovnice vytvoříme výraz pro x a dosadíme do ruhé

x = (c – b . y) / a

d . (c – b . y) / a + e . y = f a vypočítáme y

hodnotu y dosadíme do prvního výrazu a vypočteme x

b) komparace - o obou rovnic vytvoříme výraz pro stejnou proměnnou, mezi takto vytvořené výrazy položíme rovnítko a vypočteme hodnotu druhé proměnné. Hodnotu druhé proměnné dosadíme do jednoho z výrazů pro první proměnnou a vypočteme hodnotu první proměnné

x = (c – b . y)/a a **x = (f – e . y)/d**

(c – b . y)/a = (f – e . y)/d a vypočteme y

hodnotu y dosadíme do jednoho ze dvou výrazů pro x a jeho hodnotu vypočteme

c) adice - každou z rovnic vynásobíme (nestejným) číslem tak, abychom po sečtení rovnic (sčítáme parametry pro x, pro y a konstantní parametry) do jedné rovnice dostali parametru x nebo y hodnotu nula. Potom vypočteme hodnotu druhé proměnné. Nakonec dosadíme hodnotu druhé proměnné do jedné z rovnic a vypočteme hodnotu první proměnné.

a . x + b . y = c /.p => **p . a . x + p . b . y = p . c**

d . x + e . y = f /.q => **q . d . x + q . e . y = q . c**

pro p a q musí platit: **p . a – q . d = 0** nebo **p . b – q . e = 0**

(p . a + q . d) . x + (p . b + q . e) . y = (p + q) . c

… vypočteme hodnotu jedné proměnné

d) matice (matrix) – z parametrů rovnic vytvoříme matici a tu upravíme tak, aby na diagonále byly jedničky a zbylé hodnoty byly 0. V pravém sloupci pak dostaneme výsledek řešení soustavy rovnic.

a b c

d e f

po úpravě 1 0 r

0 1 s řešením je {[r,s]}

nebo

0 1 r

1 0 s řešením je {[s,r]}

Př. 1.:

$$x + 2y = 5$$
$$x - y = -1$$

Vytvoříme matici z koeficientů rovnic soustavy:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \end{matrix}$$

Od druhé rovnice odečteme první:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & -6 \end{matrix}$$

Druhou rovnici vydělíme (-3)

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix}$$

Od druhé rovnice odečteme dvojnásobek první:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix}$$

Na diagonále máme 1, zbylé hodnoty jsou nuly
První sloupec definuje x, druhý y a třetí výslednou hodnotu x a y
Z matice čteme $x = 1$, $y = 2$, řešení je $\{[1,2]\}$

Př. 2.:

$$0 . x + 1. y = 2$$
$$0 . x + 1. y = 2$$

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix}$$

od první rovnice odečteme druhou:

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix}$$

Interpretace řešení:

z druhého řádku čteme $y = 2$

ze druhého řádku čteme $x = R$ $(0 . x = 0)$

Řešení je $\{[R,2]\}$

Př. 3.:

$$0 \,.\, x + 0 \,.\, y = 0$$
$$0 \,.\, x + 0 \,.\, y = 0$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Interpretace řešení:

Pokud jsou v celé matici samé nuly, pak je řešení {[R,R]}

Př. 4.:

$$1 \,.\, x + 2 \,.\, y = 5$$
$$1 \,.\, x + 2 \,.\, y = 4$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{matrix}$$

od druhého řádku odečteme první

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix}$$

Pokud jsou v celém řádku, kromě poslední pozice, nuly a na poslední pozici nula není, pak rovnice nemá řešení.

Př. 5.:

$$1 . x + 2 . y = 5$$
$$2 . x + 4 . y = 10$$

1	2	5
2	4	10

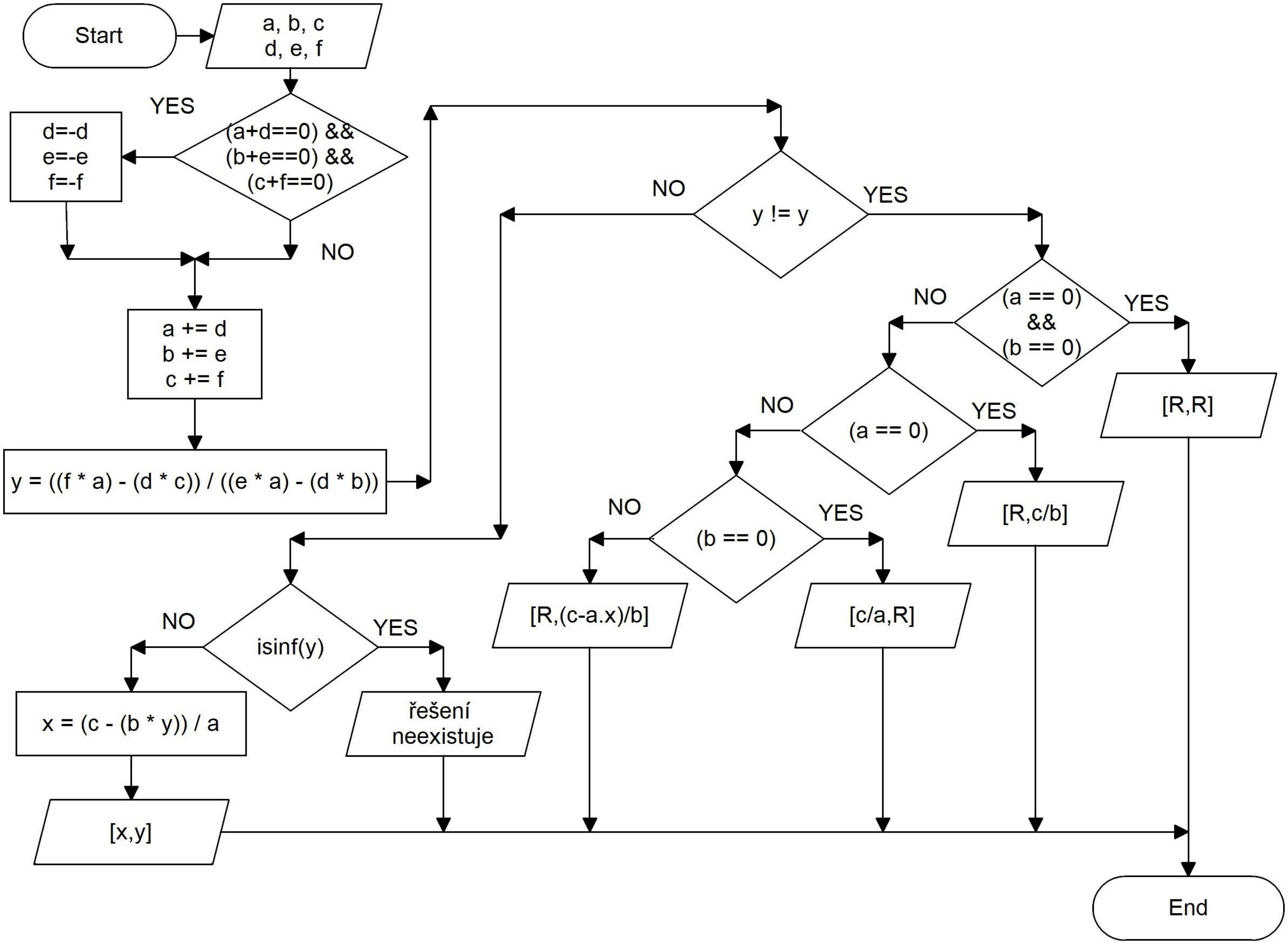
druhý řádek vydělíme 2:

1	2	5
1	2	5

od druhého řádku odečteme první:

1	2	5
0	0	0

Pokud jsou v celém řádku samé nuly a na druhém řádku, jso na pozici x a y nenulové hodnoty, pak je výsledek funkce: {[x,(5-x)/2]}


Start
a, b, c
d, e, f
YES
(a+d==0) &&
(b+e==0) &&
(c+f==0)
d=-d
e=-e
f=-f
NO
a += d
b += e
c += f
y = ((f * a) - (d * c)) / ((e * a) - (d * b))
NO
y != y
YES
NO
(a == 0)
&&
(b == 0)
YES
[R,R]
NO
(a == 0)
YES
[R,c/b]
NO
(b == 0)
YES
[R,(c-a.x)/b]
[c/a,R]
NO
isinf(y)
YES
x = (c - (b * y)) / a
řešení
neexistuje
[x,y]
End

```c
#include <stdio.h>
#include <math.h>

int main (void)
{
	float a,b,c,d,e,f,x,y;
	printf("Zadej koeficienty a, b, c prvni rovnice (oddelene mezerou): ");
	if (scanf("%f %f %f",&a,&b,&c)!=3)
	{
		printf("Chyba vstupu!\n");
		return 1;
	}
	printf("Zadej koeficienty d, e, f druhe rovnice (oddelene mezerou): ");
	if (scanf("%f %f %f",&d,&e,&f)!=3)
	{
		printf("Chyba vstupu!\n");
		return 1;
	}
	if((a+d==0)&&(b+e==0)&&(c+f==0)) {d=-d; e=-e; f=-f;}
	a += d;
	b += e;
	c += f;
	y = ((f * a) - (d * c)) / ((e * a) - (d * b));
	if (y != y)
	{
		if ((a == 0) && (b == 0)) printf("Reseni: [R, R]\n");
		else if (a == 0) printf("Reseni: [R, %.2f]\n", c / b);
		else if (b == 0) printf("Reseni: [%.2f, R]\n", c / a);
		else printf("Reseni: [R, (%.2f - %.2fx) / (%.2f)]\n", c, a, b);
	}
	else if (isinf(y)) printf("Rovnice nema reseni!\n");
	else
	{
		x = (c - (b * y)) / a;
		printf("Reseni: [%.2f, %.2f]\n", x, y);
	}

	return 0;
}
```