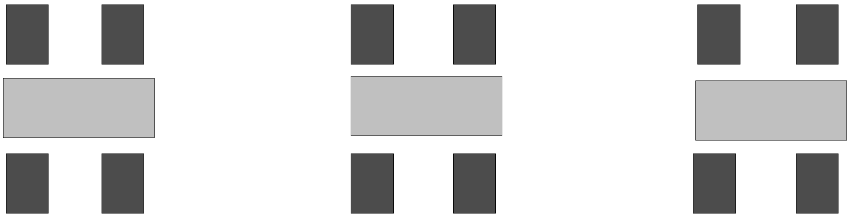
Závěrečná zkouška z Informatiky 2013

1) V malé restauraci jsou tři stoly. U každého stolu jsou čtyři židle. Stoly i židle mají pevnou pozici (nemohou změnit své místo). Do restaurace přišlo šest chlapců a čtyři dívky. Kolika různými způsoby si mohou chlapci a dívky sednout ke stolům tak, aby u každého stolu seděla alespoň jedna dívka? (situace stolů a židlí je na obrázku)



(30 bodů)

2) Kód v pascalu:

```
Program Krtek;
Var A,B,C,N: Integer;
Begin
     Readln(N);
     C := 0;
     For A := 0 to N do For B := A to N do C:= A + B + C;
     Writeln(C);
End.
```

a) Jaká bude výsledná hodnota proměnné C, když bude vstupní hodnota proměnné N = 20?
b) Pro kterou nejmenší vstupní hodnotu N bude výsledná hodnota C>1000?

a) **(20 bodů)** b) **(10 bodů)**

3) Kód v Pascalu:

```
Program Datel;
Var  A,N: Integer;
     B: Array [1..100] of Integer;
Begin
  Readln(N);
  For A:=1 to N Do B[A]:=2*(A-1)+1;
  For A:=1 to N Div 2 Do B[A]:=B[N+1-A];
  For A:=1 to N Do B[1]:=B[1]+B[A];
  Writeln(B[1]);
End.
```

Jaký výsledek napíše program pro vstupní hodnotu N=99? **(20 bodů)**

4) Následující rovnice obsahuje čísla v binárním kódu (v dvojkové soustavě). Na levé straně rovnice je násobení dvou čísel. Některé cifry čísel jsou ale nahrazeny písmeny (A,B,C). Nahraďte tato písmena číslicemi tak, aby rovnice fungovala (byla pravdivá, korektní). Platí, že jedno písmeno nahrazuje vždy stejnou číslici!

1A0BC · 10B1 = 1C01AA01

(20 bodů)

Řešení příkladů zkoušky:

1) Protože u pozic dívek máme podmínku, že u každého stolu musí sedět alespoň jedna dívka, začneme nejdříve počítat počet způsobů, kterými se mohou u stolů posadit dívky. Víme, že u jednoho stolu budou dvě a u dvou stolů bude jedna dívka.

   počet způsobů, které dvě dívky budou sedět u prvního stolu je:

   $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = \frac{24}{4} = 6$ (AB, AC, AD, BC, BD, CD)

   dále jak budou tyto dvě dívky sedět u stolu:
   Víme, že to budou dvě dívky na čtyřech židlích u stolu.

   Tedy variace: $\frac{4!}{2!} = \frac{24}{2} = 12$ (12, 21, 13, 31, 14, 41, 23, 32, 24, 42, 34, 43)

   nyní dořešíme zbylé dva stoly – u každého bude sedět jedna dívka a každá dívka má možnost si sednou na čtyři židle u svého stolu:

   Tedy u druhé stolu dívka C na čtyřech pozicích a u třetího stolu dívka D také na čtyřech pozicích.

   $4 \cdot 4 = 16$ možností

   Ale pozor, u druhé stolu může také sedět dívka D a u třetího stolu dívka C. To tedy znamená celkový počet možností

   $16 \cdot 2 = 32$ To můžeme zapsat také : $\binom{2}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{4}{1} = 2 \cdot 4 \cdot 4 = 32$

   Ale pozor, dvě dívky mohou sedět také u druhého nebo třetího stolu. Tedy tři možnosti!

   Celkem tedy **dívky** mohou v restauraci sedět $6 \cdot 12 \cdot 32 \cdot 3$ = **6 912 způsoby**.

   Nyní dopočítáme možnosti chlapců:

   Víme, že celkem je u stolů 12 židlí – tedy 12 pozic. 4Tyři pozice ale obsadily dívky. To znamená, že pro 6 chlapců zbývá 8 volných židlí (pozic).

   Můžeme pokračovat takto:
   Vypočítáme počet pozic dvou prázdných židlí z osmi: $\binom{8}{2} = \frac{8!}{6!\cdot 2!} = \frac{40320}{720\cdot 2} = 28$

   Na zbylých šesti pozicích bude permutace šesti chlapů – tedy 6! = 720

   Celkem chlapci mohou sedět : $28 \cdot 720$ = **20 160 způsoby**!

   Poslední krokem je kombinovat počet pozic dívek a chlapců :

   $6912 \cdot 20160$ = **139 345 920 způsoby**

   Dívky a chlapci si v restauraci mohou ke stolům sednout 139 345 920 způsoby.

2) Řešení části a)

Řešení příkladu rozdělíme na dvě části:
Nejprve vyřešíme cyklus, kdy A=0

```
For A := 0 to 0 do For B := A to N do C:=A + B + C;
```

Zde budeme sčítat pouze pouze B, protože A je nulové. Protože je i první B nula, budeme sčítat řadu čísel od 1 do 20. Zde platí známá formule :

$$N.\frac{(N+1)}{2}$$

Dosadíme: 20*21/2 = 210

Dále budeme řešit cyklus kdy A bude od 1 do N:

```
For A := 1 to N do For B := A to N do C:=A + B + C;
```

Abychom správně sestavili formuli, vysvětlíme si její sestavení pomocí příkladu, kdy N=5:

A	B						
1	1	1	5	2	5	4	4
1	2	2	2	3	3	4	5
1	3	2	3	3	4	5	5
1	4	2	4	3	5		

Pokud se pozorně podíváme, vidíme, že každá číslice (zde i číslo) existuje právě 6 krát. Znamená to, že máme šestkrát součet progrese čísel od 1 do 5. Můžeme tedy napsat :

6 . ((1+5) . 5) /2 - toto upravíme pro N = 5:

$$C = N.\frac{(N+1)^2}{2}$$

Pro obě části: $C = N.\frac{(N+1)^2}{2} + N.\frac{(N+1)}{2} = N.\frac{(N+1).(N+2)}{2}$

Nyní dosadíme pro N = 20 $\quad 20.\frac{21.22}{2} = \mathbf{4\ 620}$

b) Zde vyřešíme nerovnici : $\quad N.\frac{(N+1).(N+2)}{2} > 1000$

… nerovnici upravíme: $\quad N\ .\ (N + 1).(N + 2) > 2000$

Nyní nás bude zajímat $\sqrt[3]{2000} = 12{,}6$

Zkusíme do formule dosadit N = 12 $\quad 12.\frac{13.14}{2} = 1092$

Pro kontrolu ještě testujme N = 11 $\quad 11.\frac{12.13}{2} = 858$

Odsud jednoznačně vyplývá, že hledané číslo N je **12**.

3) Řešení:

```
For A:=1 to N Do B[A]:=2*(A-1)+1;
```

V prvním cyklu budou do proměnné B postupně vkládána čísla:
1, 3, 5, 7, 9, 11, ….., 197

```
For A:=1 to N Div 2 Do B[A]:=B[N+1-A];
```

Ve druhém cyklu se zrcadlově zkopírují hodnoty :
B[1]:=B[99], B[2]:=B[98], …, B[44]:=B[46] a B[45] a hodnota B[45] zůstane stejná!

```
For A:=1 to N Do B[1]:=B[1]+B[A];
```

V posledním cyklu se sečtou hodnoty všech čísel:
Víme, že budeme mít řadu čísel:
197, 195, 193, 191, …, 101, 99, 101, …, 191, 193, 195, 197
To znamená, že dvakrát sečteme řadu čísel 101 až 197 a ještě připočteme číslo 99:

$$2.\frac{(a1+a49).n}{2}+a50 = 2.\frac{(101+197).49}{2}+99 = \mathbf{14701}$$

4) 1A0BC * 10B1 = 1C01AA01

Provedeme násobení:

```
      1A0BC
     1A0BC0 * B
   1A0BC000
```

… a dále budeme provádět jednoduché matematické operace:

```
1A0BC + 1A0BC0 * B + 1A0BC000 = 1C01AA01

16*1+8*A+2*B+1*C + 32*1*B+16*A*B+4*B*B+2*B*C + 128*1+64*A+16*B+8*C =
128*1+64*C+16*1+8*A+4*A+1*1

16+8*A+2*B+C + 32*B+16*A*B+4*B*B+2*B*C + 128+64*A+16*B+8*C = 129+64*C+16+12*A

32*B+16*A*B+4*B*B+2*B*C + 60*A+18*B - 55*C = 1
```

Nyní je nejjednodušší za písmena dosadit všechny možné kombinace 0 a 1. Protože máme tři písmena, budeme mít osm kombinací (každé písmeno má dvě možnosti - 0 nebo 1, tedy 2*2*2=8)

ABC	Výsledná rovnice	Pravda
000	0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 - 0 = 1	False
001	0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 - 55 = 1	False
010	32 + 0 + 4 + 0 + 0 + 18 - 0 = 1	False
011	**32 + 0 + 4 + 2 + 0 + 18 - 55 = 1**	**TRUE**
100	0 + 0 + 0 + 0 + 60 + 0 - 0 = 1	False
101	0 + 0 + 0 + 0 + 60 + 0 - 55 = 1	False
110	32 + 16 + 4 + 0 + 60 + 18 - 0 = 1	False
111	32 + 16 + 4 + 2 + 60 + 18 - 55 = 1	False

Úloha má jedno řešení : A = 0, B = 1, C = 1.