Závěrečná zkouška z informatiky 2014

1) Algoritmus je definovaný kódem v Pascalu:

   C:=0;

   For A := 1 to N do For B := 1 to N do C := C + B Mod A;

   Jaká bude výsledná hodnota proměnné C, když vstupní hodnota proměnné N bude 10?

   (30 bodů)

   ----

2) Třídní učitel má 15 knih. Pět knih je stejných, navzájem nerozlišitelných, zbylých deset knih je jiných, navzájem odlišných (nestejných). Třídní učitel chce tyto knihy darovat svým deseti studentům. Kolika různými způsoby může tyto knihy rozdělit svým deseti studentům tak, aby každý student dostal alespoň jednu knihu, aby také žádný student nedostal žádné stejné knihy a aby třídnímu učiteli nezbyla žádná kniha (všechny rozdělí svým studentům)?

   (30 bodů)

   ----

3) Následující rovnice je zapsaná v binárním kódu. Některé číslice jsou nahrazeny písmeny (a, b c). Jedno písmeno nahrazuje vždy stejnou číslici. Různá písmena mohou ale nahrazovat stejné číslice (Např.: **a=1, b=1**). Nahraďte písmena číslicemi tak, aby byla rovnice pravdivá (pravda)!

   * - symbol pro násobení

   1aab + b0c * c0a = 1b10b

   (20 bodů)

   ----

4) Kolik existuje různých čtyřciferných čísel beze zbytku dělitelných čtyřmi, která mají v dekadickém zápisu pouze sudé číslice? Každá číslice se v čísle může libovolněkrát opakovat! Na první pozici nemůže být nula!

   (20 bodů)

Výsledky :

Příklad 1)

Máme zde dva cykly, jeden vnitřní (B) a druhý vnější (A). Hodnota proměnné C se rovná součtu zbytků dělení všech B dělených všemi A.

Pro vstupní hodnotu N = 10 platí:

V každém řádku jsou uvedeny zbytky dělení (B Mod A). Při dělení jedničkou je vždy zbytek roven nule, při dělení dvojkou je pravidelně střídají jedničky a nuly, při dělení trojkou se pravidelně střídají jedničky, dvojky a nuly. Podobně je to při dělení vyššími čísly. Pro každé další číslo přibyde o jedničku vyšší číslice do tohoto pravidelného opakování:

B/A	B=1	B=2	B=3	B=4	B=5	B=6	B=7	B=8	B=9	B=10
A=1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A=2	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
A=3	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1
A=4	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2
A=5	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0
A=6	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4
A=7	1	2	3	4	5	6	0	1	2	3
A=8	1	2	3	4	5	6	7	0	1	2
A=9	1	2	3	4	5	6	7	8	0	1
A=10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

Součty v řádcích budou

0 + 5 + 10 + 15 + 20 + 25 + 27 + 31 + 37 + 45 = 215

Podobně součty ve sloupcích budou

9 + 16 + 22 + 25 + 29 + 27 + 29 + 24 + 21 + 13 = 215

Výstupní hodnota proměnné C je 215.

Příklad 2)

Nejprve musíme rozdělit pět stejných knih. Protože žádný student nesmí mít dvě stejné knihy, hledáme kombinace - pětice z deseti prvků (hledáme kombinace pěti studentů z deseti, kteří dostanou jednu z pěti stejných knih):

$$Kombinace: \frac{10!}{5! * 5!} = \frac{3628800}{120 * 120} = \frac{3628800}{14400} = 252 \; způsobů$$

Protože každý student musí dostat alespoň jednu knihu, musíme zbylým pěti studentům vybrat každému jednu knihu z deseti odlišných knih. Protože každou vybranou pětici knih můžeme dát zbylým studentům různým způsobem (ve smyslu 123,321,...) hledáme variace pěti knih z deseti, které dáme studentm, kteří ještě nemají žádnou knihu.

$$\frac{10!}{5!} = \frac{3628800}{120} = 30240 \; způsobů$$

Nyní zbývá libovolně rozdělit zbylých pět knih. Můžeme je rozdělovat bez ohledu na to, kolik knih který student dostane.

Máme pět knih a každou knihu můžeme dát jednomu z deseti studentů, je možné dát i všechny knihy jednomu studentovi. Celkový počet možností, jak rozdělit pět různých knih mezi deset studentů je

$$10 * 10 * 10 * 10 * 10 = 10^5$$

A už zbývá jen vynásobit všechny předchozí výsledky mezi sebou:

$$252 * 30240 * 10^5 = 762048000000$$

Knihy můžeme studentům rozdělit 762 048 000 000 způsoby.

Jakýkoli z výše uvedených zápisů výsledku je správný.

Příklad 3)

1aab + b0c * c0a = 1b10b

Protože máme tři písmena zastupující binární číslice vytvoříme tabulku s osmi řádky a v každém řádku dosatíme dosadíme namísto písmen hodnoty 0/1:

a	b	c	
0	0	0	8 + 0 * 0 = 20
0	0	1	8 + 1 * 4 = 20
0	1	0	9 + 4 * 0 = 29
0	1	1	9 + 5 * 4 = 29
1	0	0	14 + 0 * 1 = 20
1	0	1	14 + 1 * 5 = 20
1	1	0	15 + 4 * 1 = 29
1	1	1	15 + 5 * 5 = 29

Správný výsledek je tedy

1001+101*100=11101   tedy   9 + 5 * 4 = 29

a = 0, b = c = 1

Příklad 4)

Číslo je dělitelné čtyřmi, pokud je dělitelné čtyčmi jeho koncové dvojčíslí! Proto rozdělíme řešení na dvě části. Nejprve nejdeme všechny možné kombinace číslic pro první dvojčíslí:

Na první pozici mohou být číslice 2,4,6 a 8 – tedy čtyři možnosti. Na druhé pozici mohou být číslice 0, 2,4,6 a 8 – tedy pět možností. Tedy celkem 4 * 5 = 20 prvních dvojčíslí (20, 22, 24, 26, 28, 40, 42, 44, 46, 48, 60, 62, 64, 66, 68, 80, 82, 84, 86 a 88)

Nyní najdeme všechna možná koncová dvojčíslí dělitelná čtyřmi. Můžeme použít všechny sudé číslice. Podmínce vyhovují následující dvojčíslí:

00, 04, 08, 20, 24, 28, 40, 44, 48, 60, 64, 68, 80, 84 a 88 – tedy 15 koncových dvojčíslí.

Nyní vynásobíme počet prvních a koncových dvojčíslí: 20 * 15 = **300**