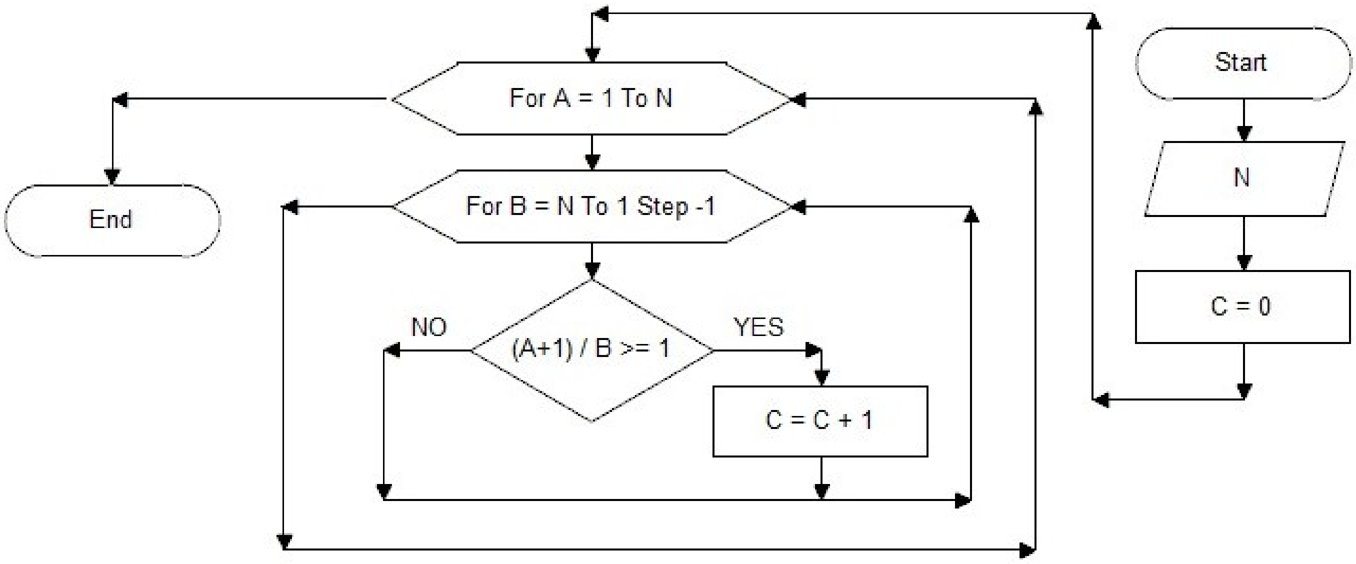
Závěrečná zkouška z informatiky 2018

Správné řešení bude akceptováno jen když bude adekvátní výpočet v odevzdané práci!

Příklad 1

Algoritmus je definovaný vývojovým diagramem na obrázku. Vstupem je celé kladné číslo N.



a) Jaká bude hodnota proměnné C na konci algoritmu, když bude vstupní hodnota N = 55?
b) Pro kterou nejmenší vstupní hodnotu proměnné N bude na konci algoritmu hodnota proměnné C větší než 100?

Příklad 2

Číslo **2A1BC01** je zapsáno v trojkové soustavě. Některé číslice jsou nahrazeny písmeny A, B a C. Nahraďte písmena tak, aby výsledné číslo bylo dělitelné 5 (pěti). Výsledek zapište ve trojkové soustavě. Nalezněte všechna řešení! *(trojková soustava používá číslice 0, 1, 2)*

Příklad 3

V počítačové učebně je deset počítačů. Ve skupině, která do počítačové třídy přišla na lekci, je 13 studentů. Kolika způsoby se mohou studenti rozdělit k počítačům tak, aby u každého počítače pracovali nejvýše dva studenti a zároveň (a také) každý student pracoval u nějakého počítače a zároveň (a také) u každého počítače pracoval alespoň jeden student?

V případě dvojice studentů nezáleží na pořadí, není důležité, který student sedí vlevo a který vpravo (platí, že AB=BA). Výsledek můžete zapsat jenom pomocí kombinačního čísla.

Příklad 4

Kolik existuje různých pěticiferných čísel složených z číslic množiny {0, 0, 1, 1, 2, 2}. Každá číslice v pěticiferném čísle může být použita (existovat) nejvýše tolikrát, kolikrát je obsažena v množině – tedy nejvýše dvakrát!

Řešení:

Příklad 1

Jestli je splněna podmínka (A+1)/B >= 1, pak algoritmu přičítá do proměnné C jedničku. Pro vnitřní cyklus jedničku postupně přičte dvakrát, třikrát, … , N-1krát, N krát a N krát! Je to tedy součet prvků aritmetické posloupnosti od 2 do N+1 a od výsledku musíme odečíst 1, protože v posledním cyklu se jednička nepřičte N+1 krát ale jenom N krát - protože cyklus má jenom N opakování! Můžeme napsat, že C je funkcí N a platí vzoreček odvozený ze vzorečku pro součet prvků aritmetické posloupnosti:

$C=\frac{2+N+1}{2}.N-1=\frac{N+3}{2}.N-1$ Dosadíme do vzorečku:

a) $C=\frac{N+3}{2}.N-1=\frac{55+3}{2}.55-1=1594$ **C = 1594**

b) $C<\frac{N+3}{2}.N-1$ $200<N^2+3.N-2$ $0<N^2+3.N-202$; N > 12,79; **N = 13**

Příklad 2

Číslo **2A1BC01** zapíšeme pomocí exponentů:

$2.3^6+A.3^5+1.3^4+B.3^3+C.3^2+0.3^1+1.3^0=2.729+243.A+1.81+27.B+9.C+0+1$ to upravíme:

$1458+243.A+81+27.B+9.C+1=1540+243.A+27.B+9.C$

Číslo 1540 je dělitelné 5, proto je první výsledek **A = 0, B = 0** a **C = 0.** Dále budeme hledat taková A, B a C, aby součet 243.A + 27.B + 9.C byl dělitelný 5. Za písmena A, B a C můžeme dosadit 0, 1 nebo 2. Řešení si můžeme zjednodušit tak, že budeme pracovat pouze s poslední platnou číslicí koeficientu u A, B a C: 3.A + 7.B + 9.C. Můžeme to udělat proto, že desítky i stovky jsou dělitelné pěti:

1540+243.A+27.B+9.C je dělitelné 5			
Po úpravě: **1540+3.A+7.B+9.C** je dělitelné 5			
A	**B**	**C**	**Výsledné číslo**
0	0	0	2010001
0	1	2	2011201
1	1	0	2111001
2	2	0	2212001
2	0	1	2210101
1	2	2	2112201

Příklad 3

7 ze 13 studentů bude pracovat samostatně u 7 z 10 počítačů a za ze zbylých 6 studentů se vytvoří dvojice, které budou pracovat u 3 zbylých počítačů:

a) studenti, kteří pracují samostatně:

$\binom{13}{7}_{studenti,\ kte\check{r}\acute{i}\ pracuj\acute{i}\ sami} . \binom{10}{7}_{pacuj\acute{i}\ u\, 7\, z\, 10\, PC} . 7!_{7\, dvojic\, na\, 7\, PC}$ = 1716 . 120 . 5040 = 1 037 836 800

b) studenti, kteří pracují ve dvojici:

$\binom{6}{2}_{PC8:\ dvojice\ ze\ zbyl\acute{y}ch\ 6\ student\mathring{u}} . \binom{4}{2}_{PC9:\ dvojice\ ze\ zbyl\acute{y}ch\ 4\ student\mathring{u}} . \binom{2}{2}_{PC10:\ poslen\acute{i}\ dvojice}$ = 15 . 6 . 1 = 90

celkem : 1037 836 800 . 90 = 93 405 312 000

Studenti se mohou k PC posadit 93 405 312 000 **, to je** $\binom{13}{7}.\binom{10}{7}.7!.\binom{6}{2}.\binom{4}{2}.\binom{2}{2}$ **způsoby.**

Příklad také můžeme řešit takto *(řešení Nikita Sokovnin)*:

$$\binom{10}{3}_{3\,PC\,,\,kde\ jsou\ 2\ studenti} . \binom{13}{2}_{1.\text{dvojice}} . \binom{11}{2}_{2.dvojice} . \binom{9}{2}_{3.dvojice} .7\,!_{permutace\ pozic\ samotných\ studentů}$$

Příklad 4

a) nepoužijeme jednu nulu – použijeme {0, 1, 1, 2, 2} – v čísle na první pozici _"1" nebo „2", na druhé až páté pozici bude jedna dvojice číslic „11" nebo „22"

$$\binom{2}{1}_{na\ první\ pozici\ 1\ nebo\ 2} . \binom{4}{2}_{pozice\ dvou\ stejných\ číslic} . \binom{2}{1}_{pozice\ dvou\ různých\ číslic\ na\ dvou\ pozicích} = 2 . 6 . 2 = \mathbf{24}$$

10122, 10212, 10221, 11022, 11202, 11220, 12012, 12021, 12102, 12120, 12201, 12210, 20211, 20121, 20112, 22011, 22101, 22110, 21021, 21012, 21201, 21210, 21112, 21120,

b) nepoužijeme jednu jedničku nebo jednu dvojku – použijeme {0, 0, 1, 2, 2} nebo {0, 0, 1, 1, 2}
– na první pozici bude jedna z jedné „1" nebo jedna z jedné „2"

$$\binom{2}{1}_{na\ první\ pozici\ 1\ nebo\ 2} . \binom{4}{2}_{pozice\ dvojice\ nul\ a\ dvou\ dvojek\ 0,0,1,2,2-(\ první\ 1)\ nebo\ dvou\ jedniček\ 0,0,1,1,2-(\ první\ 2)} = 2 . 6 = \mathbf{12}$$

10022, 10202, 10220, 12002, 12020, 12200, 20011, 20101, 20110, 21001, 21010, 21100,

– na první pozici bude jedna ze dvou „1" {0, 0, 1, 2, 2} nebo jedna ze dvou „2" {0, 0, 1, 1, 2}

$$\binom{2}{1}_{na\ první\ pozici\ 1\ nebo\ 2} . \binom{4}{2}_{pozice\ dvou\ nul} . \binom{2}{1}_{pozice\ dvou\ různých\ číslic\ na\ dvou\ pozicích} = 2 . 6 . 2 = \mathbf{24}$$

10012, 10021, 10102, 10201,10120, 10210, 11002, 12001, 11020, 12010, 11200, 12100, 20021, 20012, 20201, 20102, 20210, 20120, 22001, 21002, 22010, 21020, 22100, 21200,

Celkem existuje 60 různých čísel.
Čísla nemusíte vypisovat!