Závěrečná zkouška z informatiky 2019

Správné řešení bude akceptováno jen když bude adekvátní výpočet v odevzdané práci!

Příklad 1

Algoritmus je definovaný kódem v programovacím jazyce C. Vstupem je celé kladné číslo N.

```
int N,S=0;
scanf("%d",&N);
while(N>0)
{
    S++;
    if (N%2==1) S++;
    N--;
}
```

a) Jaká bude hodnota proměnné **S** na konci algoritmu, když bude vstupní hodnota **N = 99**?
b) Pro kterou vstupní hodnotu proměnné **N** bude na konci algoritmu hodnota proměnné **S=899**?

Příklad 2

Algoritmus je definovaný kódem v programovacím jazyce C. Vstupem je celé kladné číslo N.

```
int N, A, B, S=-10;
scanf("%d",&N);
for(A=0;A<=N;A++) for(B=0;B<=N-A;B++) S++;
```

a) Jaká bude hodnota proměnné **S** na konci algoritmu, když bude vstupní hodnota **N = 99**?
b) Pro kterou nejmenší vstupní hodnotu proměnné **N** bude na konci algoritmu hodnota proměnné **S>899**?

Příklad 3

Číslo $3A21B_4$ je zapsané ve čtyřkové číselné soustavě (základem této soustavy číslo 4). Dvě číslice jsou nahrazeny písmeny. Na místa písmen zapište číslice tak, aby výsledné číslo ve čtyřkové soustavě bylo dělitelné šesti. Výsledek zapište ve čtyřkové soustavě. Nalezněte všechna řešení. *Číslice na pozicích A a B mohou být různé (nejsou si rovny) i stejné (mohou se sobě rovnat) !*

Příklad 4

Kolika způsoby může na čtyřech hracích kostkách, dvou modrých, navzájem shodných (nerozlišitelných), jedné červené a jedné žluté, padnout součet bodů 13 v případě, že každou ze čtyřech kostech vrhneme (hodíme) právě jednou? *(padnout=zde výsledek na kostce)*

Každá kostka má svoje stěny označeny body 1, 2, 3, 4 , 5 a 6.
Na obrázku jsou naše čtyři hrací kostky, na kterých padl součet 21.

Řešení:

Příklad 1

V každém cyklu While se hodnota proměnné S zvýší o jedničku a pokud je aktuální hodnota proměnné N lichá, zvýší se ještě o další jedničku. A dále se hodnota proměnné N sníží o jedničku. Tento proces pokračuje, jestli je aktuální hodnota proměnné N>0. Konečnou hodnotu S můžeme zapsat jako f(N):

$$S = N + \frac{N}{2} + N \, mod \, 2 \quad \textit{pro sudé N bude} \quad S_{N..sudé} = N + \frac{N}{2} \quad \textit{, pro liché:} \quad S_{N..liché} = N + \frac{N-1}{2} + 1$$

Pozor: N je integer a proto je dělení celočíselné (DIV) a proto je ve vzorci (N-1)/2 !!!

a) N je liché: $S_{N..liché} = N + \frac{N-1}{2} + 1 = 99 + \frac{99-1}{2} + 1 = 99 + 49 + 1$ **S=149**

b) musíme ověřit výpočet pro sudé: $S_{N..sudé} = N + \frac{N}{2} \rightarrow 899 = N + \frac{N}{2} \rightarrow N = 599{,}333 \rightarrow \textit{Není integer}$ a

pro liché: $S_{N..liché} = N + \frac{N-1}{2} + 1 \rightarrow 899 = N + \frac{N-1}{2} + 1 \rightarrow$ **N=599**

Příklad 2

Zde máme dva cykly for: A(0..N) a B (0..N-A). algoritmus si upravíme tak, aby bylo S=f(N):
např. Pro N=4 bude

A (0..4)	B (0..N-A)	
0	0..4	5
1	0..3	4
2	0..2	3
3	0..1	2
4	0..0	1

Výsledek je tedy součet pěti prvků aritmetické posloupnosti od 1 do 5 (tedy N+1) prvků od 1 do N+1:

$S = \frac{a_1 + a_n}{2} . n \rightarrow S = \frac{1+N+1}{2} . (N+1) \rightarrow S = \frac{(N+2).(N+1)}{2}$ ale protože S je na počátku -10 musíme rovnici upravit: $S = \frac{(N+2).(N+1)}{2} - 10$

a) dosadíme: $S = \frac{(99+2).(99+1)}{2} - 10 = \frac{101.100}{2} - 10$ **S=5040**

b) řešíme nerovnici: $S \geq \frac{(N+2).(N+1)}{2} - 10 \rightarrow 899 \geq \frac{(N+2).(N+1)}{2} - 10$ řešením této nerovnice je je první kladné celé číslo z intervalu <41,14;∞) a to je **N=42.**

Příklad 3

Číslo $3A21B_4$ si můžeme převést do desítkové soustavy:

$3.4^4+A.4^3+2.4^2+1.4^1+B.4^0 = 3.256+64.A+2.16+4+B = 804+64.A+B$

Nyní budeme hledat možnosti A a B tak, aby výsledné číslo 804+64.A+B bylo dělitelné šesti:
Ve čtyřkové soustavě mohou být číslice 0, 1, 2 nebo 3.
Číslo je dělitelné šesti právě tehdy, když je dělitelné dvěma a třemi. Číslo 804 je dělitelné šesti, budeme tedy hledat možnosti jenom pro 64.A+B:

64.A	A=0 0	A=0 0	A=0 0	A=0 0	A=1 64	A=1 64	A=1 64	A=1 64	A=2 128	A=2 128	A=2 128	A=2 128	A=3 192	A=3 192	A=3 192	A=3 192
B	B=0 0	B=1 1	B=2 2	B=3 3	B=0 0	B=1 1	B=2 2	B=3 3	B=0 0	B=1 1	B=2 2	B=3 3	B=0 0	B=1 1	B=2 2	B=3 3
Celkem	0	1	2	3	64	65	66	67	128	129	130	131	192	193	194	195

Úloha má tři řešení: **30210_4** (804_{10}), **31212_4** (870_{10}) a **33210_4** (996_{10}).

Příklad 4

Nejprve nalezneme všechny způsoby, jak můžeme ze čtyřech čísel od 1 do 6 složit číslo 13 a tyto způsoby rozdělíme podle toho, kolik čísel se ve čtveřici čísel opakuje:

a) ***tři čísla stejná a jedno jiné (A+A+A+B)***: 1444 a 3334

1) „B“ bude na modré : 1 způsob

B	A	A	A

2) „B“ nebude na modré: 2 způsoby

A	A	B	A
A	A	A	B

Celkem pro A+A+A+B bude: 2 * (1+2) = 6 způsobů

b) ***dvě čísla stejná a dvě různá (A+A+B+C)***: 1156, 1255, 1336, 2236, 2245, 1335, 2344

1) na modrých budou dvě „A“ : 2 způsoby

A	A	B	C
A	A	C	B

2) na modrých bude jedno „A“ : $\binom{2}{1}.\binom{2}{1}=2.2=4$ 4 způsoby

A	B	A	C
A	B	C	A
A	C	A	B
A	C	B	A

3) na modrých nebude žádné „A“ : 1 způsob

B	C	A	A

Celkem pro A+A+B+C bude: 7 * (2+4+1) = 49 způsobů

c) ***každé číslo jiné (A+B+C+D)*****:** 1246, 1345

$$\binom{4}{2}.\binom{2}{1}=6.2=12$$

- první kombinační číslo = dvojice na modrých kostkách,
- druhé kombinační číslo = možnosti na třetí kostce (žluté), na červené kostce bude zbylé číslo!

A	B	C	D
A	B	D	C
A	C	B	D
A	C	D	B
A	D	B	C
A	D	C	B

B	**C**	**A**	**D**
B	**C**	**D**	**A**
B	**D**	**A**	**C**
B	**D**	**C**	**A**
C	**D**	**A**	**B**
C	**D**	**B**	**A**

Celkem pro A+B+C+D bude: $2.\binom{4}{2}.\binom{2}{1}=2.6.2=24$ **24 způsobů**

Celkem bude: 6 + 49 + 24 = **79 způsobů**

Příklad také můžeme řešit takto:

Součet modrých kostek	***Součet červené a žluté kostky***	***Počet způsobů***
2 (1+1)	11 (5+6)	2
3 (1+2)	10 (5+5, 4+6)	3
4 (1+3, 2+2)	9 (3+6, 4+5)	8
5 (1+4, 2+3)	8 (2+6, 3+5, 4+4)	10
6 (1+5, 2+4, 3+3)	7 (1+6, 2+5, 3+4)	18
7 (1+6, 2+5, 3+4)	6 (1+5, 2+4, 3+3)	15
8 (2+6, 3+5, 4+4)	5 (1+4, 2+3)	12
9 (3+6, 4+5)	4 (1+3, 2+2)	6
10 (4+6, 5+5)	3 (1+2)	4
11 (5+6)	2 (1+1)	1
Celkem		***79***