Závěrečná zkouška z informatiky 2020

Správné řešení bude akceptováno jen když bude adekvátní výpočet v odevzdané práci!

Příklad 1

Algoritmus je definovaný kódem v programovacím jazyce C. Vstupem je celé kladné číslo N.

```
int main (void)
{
        int N,S=0;
        scanf("%d",&N);
        while(N)
        {
                S++;
                if(N%2==1) S+=N;
                N--;
        }
}
```

a) Jaká bude hodnota proměnné **S** na konci algoritmu, když bude vstupní hodnota **N = 99**?
b) Pro kterou vstupní hodnotu proměnné **N** bude na konci algoritmu hodnota proměnné **S=5040**?

Příklad 2

Algoritmus je definovaný kódem v programovacím jazyce C. Vstupem je celé kladné číslo N.

```
int main (void)
{
        int N, A, B, S=0;
        scanf("%d",&N);
        for(A=0;A<=N;A++) for(B=1;B<=N;B++) S+=A;
}
```

a) Jaká bude hodnota proměnné **S** na konci algoritmu, když bude vstupní hodnota **N = 99** ?
b) Pro kterou vstupní hodnotu proměnné **N** bude na konci algoritmu hodnota proměnné **S=726** ?

Příklad 3

Máme rovnici, která je zapsaná v pětkové číselné soustavě. Některé číslice čísel jsou nahrazeny velkými písmeny (A,B,C a D):

$$\mathbf{12A44_5 - 2B41_5 = 42CD_5}$$

Nahraďte tato písmena číslicemi pětkové číselné soustavy tak, aby rovnice fungovala – byla správná. Nalezněte všechna řešení! Na první pozici (číslici) čísla nesmí být číslice 0 (nula)!

Příklad 4

Ve třídě je 15 studentů. Kolika způsoby mezi těchto 15 studentů můžeme rozdělit 20 stejných, navzájem nerozlišitelných bonbónů tak, aby každý student dostal alespoň jeden a žádný student nedostal více než tři bonbóny?

Řešení:

Příklad 1

V každém cyklu While se hodnota proměnné S zvýší o jedničku a pokud je aktuální hodnota proměnné N lichá, zvýší se ještě o hodnotu proměnné N. Na konci cyklu se hodnota proměnné N sníží o jedničku. Tento proces pokračuje, jestli je aktuální hodnota proměnné různá od nuly (true). Výsledek je číslo N + suma všech lichých čísel od 1 do N. Konečnou hodnotu S můžeme zapsat jako f(N):

Pro sudé N: $S = N + \frac{1+N-1}{2} . \frac{N}{2} = N + \frac{N}{2} . \frac{N}{2} = N + \frac{N^2}{4}$

Pro liché N: $S = N + \frac{1+N}{2} . \frac{N+1}{2} = N + \frac{(N+1)^2}{4}$

a) N = 99 je liché: $S = N + \frac{(N+1)^2}{4} = 99 + \frac{(99+1)^2}{4} = 99 + \frac{10000}{4} = 99 + 2500 = 2599$ **S=2599**

b) Protože nevíme, jestli je vstupní hodnota N sudá nebo lichá, musíme ověřit obě rovnice:

Pro sudé N: $5040 = N + \frac{N^2}{4}$ *upravíme na kvadratickou rovnici:* $0 = N^2 + 4.\mathrm{N} - 20160$

kladný kořen této rovnice je 140

Pro liché N: $5040 = N + \frac{(N+1)^2}{4}$ *upravíme na kvadratickou rovnici:* $0 = N^2 + 6.\mathrm{N} - 20159$

kořen není celočíselný a proto vezmeme výsledek pro sudé N: **N=140**

Příklad 2

Zde máme dva cykly for: A(0..N) a B (1..N). Vnitřní cyklus se vždy opakuje Nx, při každém opakování vnitřního cyklu se do proměnné S přičte hodnota proměnné A. To znamená, že v proměnné S bude N krát součet čísel od 0 do N.

Vytvoříme vzoreček: $S = N. \frac{1+N}{2} . N = \frac{1+N}{2} . N^2$

a) dosadíme: $S = \frac{1+N}{2} . N^2 = \frac{1+99}{2} . 99^2 = 490\,050$ **S=490 050**

b) řešíme nerovnici: $726 = \frac{1+N}{2} . N^2$,

po úpravě bude mít rovnice tvar $N^2 . (N+1) = 1452$ nebo také $N^3 + N^2 = 1452$

Při řešení nám pomůže třetí odmocnina z čísla 1452 – to je číslo 11,3.... Protože máme ještě N^2 a víme, že N je celé číslo (integer), pak může zkusit N=11 (první menší celé číslo než 11,3) a dosadit ho do rovnice: $11^3 + 11^2 = 1452$, upravíme: $1331 + 121 = 1452$ a to je správně!!! **N=11.**

Příklad 3

Rovnici **$12A44_5$ – $2B41_5$ = $42CD_5$** upravíme pro známé a neznámé číslice:

$$1*5^4 + 2*5^3 + A*5^2 + 4*5^1 + 4*5^0 - (2*5^3 + B*5^2 + 4*5^1 + 1*5^0) = 4*5^3 + 2*5^2 + C*5^1 + D*5^0$$

$$625 + 250 + 25\mathrm{A} + 20 + 4 - 250 - 25\mathrm{B} - 20 - 1 = 500 + 50 + 5\mathrm{C} + 1\mathrm{D}$$

$$628 + 25\mathrm{A} - 25\mathrm{B} = 550 + 5\mathrm{C} + 1\mathrm{D}$$

$$78 = 25\mathrm{B} + 5\mathrm{C} + 1\mathrm{D} - 25\mathrm{A}$$

Z rovnice vidíme, že B musí být o 3 větší než A, aby výsledek mohl být 78!

Takže máme dvě možnosti

A=0, B=3: $78 = 75 + 5\mathrm{C} + 1\mathrm{D}$ potom **C = 0, D = 3**

A=1, B=4: $78 = 100 + 5\mathrm{C} + 1\mathrm{D} - 25$ potom **C = 0, D = 3**

Prověříme:

A=0, B=3, C=0, D=3	**$12044_5 - 2341_5 = 4203_5$**	**899 – 346 = 553**	**OK**
A=1, B=4, C=0, D=3	**$12144_5 - 2441_5 = 4203_5$**	**924 – 371 = 553**	**OK**

Úloha má dvě řešení!

Příklad 4

Nejprve každému studentovi dáme jeden bonbón. Potom nám zůstane 5 bonbónů, které budeme ještě rozdělovat:

a) pěti studentům dáme jeden: $\binom{15}{5} = \frac{15!}{10!.5!} = 3003$

b) jednomu studentovi dáme dva a třem jeden bonbón: $\binom{15}{1}.\binom{14}{3} = \frac{15!}{14!.1!}.\frac{14!}{11!.3!} = 15.364 = 5460$

c) dvěma studentům dáme dva a jednomu jeden bonbón: $\binom{15}{2}.\binom{13}{1} = \frac{15!}{13!.2!}.\frac{13!}{12!.1!} = 105.13 = 1365$

Celkem existuje 3003+5460+1365 = 9828 způsobů.