ausgehender Zweck, der selbst nur das Resultat ist."[71] In diesem Sein gegen die es bedrohende Zeitlichkeit besteht nach Hegel das Affirmative dieses Begriffes. Drittens besteht die Möglichkeit, durch *Analyse* dessen, was in einem Begriff impliziert ist, z.B. durch *Kombination elementarer Begriffe*, seine weitere Ausdifferenzierung zu begründen. Als Beispiel will ich einen Gedanken nennen, der bei Hegel aufgrund des Standes der Biologie seiner Zeit noch nicht ausgeführt sein konnte, aber mit seinen phänomenologisch eindrucksvollen Analysen der Unterschiede von Pflanze und Tier – klassischen Kategorien der Naturbeschreibung – kompatibel ist, ja, sie auf eine plausible Grundlage stellt. Charakterisiert es die organische Subjektivität, daß sie „die physische allgemeine und individuelle Natur von sich ausschließt und ihr gegenübertritt, aber zugleich an diesen Mächten die Bedingung ihrer Existenz, die Erregung wie das Material ihres Prozesses, hat",[72] so liegt es nahe, nach der Einführung der Kategorie des Organismus den organischen Metabolismus danach zu unterscheiden, ob er Anorganisches oder Organisches zur Grundlage hat, ob es sich also um autotrophe oder heterotrophe Organismen handelt. Viertens ist es eines der zentralen Erfordernisse der Hegelschen Lehre, daß die Begriffe, mit denen wir uns selbst und unsere begriffsbildenden Aktivitäten beschreiben, selber Teil eines vollständigen Systems der Begriffe sein müssen. Man kann mit Karl-Otto Apel von *Selbsteinholungsprinzip* sprechen oder mit Brandom von „explicit interpretive equilibrium".[73] Sind diese vier Forderungen ausreichend, um zum Begriffssystem der *Enzyklopädie* zu gelangen? Natürlich nicht. Da dieses Begriffssystem in seiner Totalität nicht das unsere sein kann, mag diese negative Antwort freilich dazu ermuntern, sich nicht zu schnell von jenen Forderungen zu verabschieden. Denn der Preis ihrer Ignorierung ist hoch: *Sellars, McDowell und Brandom haben zwar den Mythos des vorbegrifflich Gegebenen überwunden, riskieren aber dafür, die Begriffe selbst zu etwas Gegebenem zu machen.* Nur wenn die Begriffe nicht nur aufgerafft werden, sondern in einem einsichtigen Begründungszusammenhang stehen, ist die Sphäre brutaler Faktizität wirklich verlassen und die Welt der Begriffe ein Reich der Freiheit.

Prof. Dr. Vittorio Hösle, 318 O'Shaughnessy, University of Notre Dame, USA-Notre Dame, IN 46556; e-mail: vhosle@nd.edu

71 *Enz.* §352, 9.435.
72 *Enz.* §342, 9.367.
73 *Making It Explicit* (Anm. 8), 716, Anm. 35.

Lässt sich der Logizismus retten?

Vojtěch Kolman, Prag

Zusammenfassung

In meinem Artikel versuche ich zu zeigen, warum sich der Logizismus nicht retten lässt. Im Bewusstsein, dass solch allgemeine Aussagen über Logizismus, also über die epistemische Natur der Mathematik für gewöhnlich mehr Probleme mit sich bringen als sie lösen, beziehe ich mich explizit auf Crispin Wrights Neologizismus, George Boolos' fregeanische Untersuchungen und Paul Lorenzens operative Deutung der Arithmetik. Meine Hauptthese stützt sich dabei auf die Beobachtung, dass der Logizismus den praktischen, kalkulatorischen Charakter der Arithmetik unterschätzt: Ich zeige ausführlich, dass und warum sich die induktive Definition, also gerade das Kantsche operative Element, aus den Grundlagen nicht sinnvoll eliminieren lässt – zumindest nicht mit den Mitteln des Fregeschen Logizismus oder seiner selbsternannten Nachfolger (Wright, Hale).

Summary

The objective of my article is to show why it is impossible to maintain the doctrine of logicism. I am deeply aware that rather than solving the problem, general claims concerning epistemic nature of mathematics usually create new ones, therefore I try to proceed as specifically as possible with concrete references to Crispin Wright's neo-logicism, George Boolos' Fregean studies and Paul Lorenzen's operativist account of mathematics. My main thesis rests on the observation that logicism undervalues the practical, calculational character of arithmetic: I demonstrate in detail why inductive definition, i.e. the Kantian operative element, is not meaningfully eliminable from the foundations of arithmetic, at least not by means of the Fregean logicism or its alleged (Wright's and Hale's) successor.

Im Folgenden versuche ich zu begründen, warum sich der Logizismus nicht retten lässt. Ähnlich wie im Falle der These, dass es in der Arithmetik so etwas wie synthetische Wahrheiten gibt, die zugleich a priori gelten, ist ein derart allgemeines Urteil freilich höchst problematisch. Sein Status ist von der Art der Behauptung Poincarés, dass die Induktion ein rein mathematisches Prinzip sei, und ähnelt Wittgensteins pauschaler Kritik an der Metamathematik.[1] Ich bin mir bewusst, dass so allgemeine Aussagen über Logizismus, Mathematik oder Meta-

1 Vgl. L. Wittgenstein, *Philosophische Grammatik*, ed. R. Rhees, Frankfurt a.M. 1984, 306ff.; H. Poincaré, *Science et méthode*, Paris 1908.

mathematik für gewöhnlich mehr Probleme mit sich bringen, als sie lösen. Im Folgenden argumentiere ich daher so konkret wie möglich und beziehe mich dabei auf Crispin Wrights Neologizismus, George Boolos' fregeanische Untersuchungen und Paul Lorenzens operative Deutung der Arithmetik.

1. Zahl und Paradox

Die Geschichte des Logizismus und der Streit um das synthetische Apriori sind eng mit zwei logischen Schlüsselbegriffen verbunden: dem Begriff der *Zahl* und dem Begriff der *Paradoxie*. Schon die Entstehung des Logizismus geht auf die *Paradoxien* zurück, die im Bereich der mathematischen Analysis als Paradoxien des Unendlichen (des unendlich Kleinen z.B. bei Summation unendlicher Reihen) und des Anschaulichen (Widersprüche des Bewiesenen mit dem Evidenten wie z.B. im Zusammenhang mit Differenzierbarkeit und Stetigkeit) eine Klärung des zunächst noch vagen Begriffes der *reellen Zahl* veranlassten. Die mengentheoretische Reduktion dieses Begriffs auf den Begriff der *natürlichen Zahl* führte zu Freges *Begriffsschrift*[2] und Dedekinds *Was sind und was sollen die Zahlen?*.[3] Umgekehrt war es das *Paradox* in Freges *Grundgesetzen der Arithmetik*, das den Logizismus in Frage stellte und die Ausformung der Logik für das weitere Jahrhundert beeinflusste.

Die logizistische Hypothese über die Reduzierbarkeit der Arithmetik auf die Logik ist von einem historischen Standpunkt aus betrachtet keineswegs einleuchtend. Auch wenn sich die Arithmetik in einer Krise befand, wusste man zumindest grob, was ein arithmetischer Satz oder Beweis ist; aber niemand konnte sagen, was ein logischer Satz oder Beweis ist, weil einfach keine funktionstüchtige Logik existierte. Frege selbst hat eine für seine Zwecke taugliche mathematische oder besser arithmetische Logik allererst erfunden. Damit war der Weg erst frei für den Versuch des Logizismus, die Arithmetik insgesamt auf eine logische Grundlage zu stellen. Davon wussten aber andere „Logizisten" wie Dedekind oder „Halblogizisten" wie Peano lange Jahre nichts. Wenn also diese Zeitgenossen Freges oder sogar seine direkten Vorläufer wie Jevons und Schröder von einer logischen Begründung der Arithmetik sprechen, geben sie damit nur programmatische Absichten kund, eine Methode zu verfolgen, welche die anschauliche Arithmetik auf den sicheren Weg einer apriorischen Wissenschaft zu bringen erlaubte, und zwar in Abgrenzung von Kants These, die Arithmetik sei synthetisch und apriori.

Auch Frege setzt sich mit dem kantischen Paradigma (partiell bewusst, partiell unbewusst) auseinander. Es ist daher keine Überraschung, dass eine relevante

2 G. Frege, *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Halle 1879.

3 R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Braunschweig 1888.

Unterscheidung, welche bei der Entstehung und dem Untergang dessen, was wir Logizismus nennen, eine prominente Rolle spielte, letztendlich die Unterscheidung zwischen ‚konstruktiv' und ‚diskursiv' bzw. zwischen ‚anschaulich' und ‚begrifflich' war. In diesem Licht sieht die Aufgabe von Frege und Dedekind so aus: Wie sind Zahlen anders zu erfassen als durch den Hinweis auf eine unendliche Konstruktion

$$0,\ 0+1,\ 0+1+1,\ 0+1+1+1,\ \text{usw.},$$

welche – in Kants Redeweise – Anschauungen erfordert, da es sich um eine Konstruktion von *Zeichen* handelt? Die Antwort schien einfach: Man kann Zahlen als Anzahlen zu definieren versuchen, und zwar durch begriffliche Ausgliederung. Mit seiner Definition des Nachfolgers in einer Reihe stellte die *Begriffsschrift* einen ersten Erfolg auf diesem Wege dar.

Das fragliche Problem ist am leichtesten so zu beschreiben: die Beziehung des (genetischen) Elternteils vorausgesetzt, wie ist die Beziehung des (genetischen) Vorfahren zu definieren? Wir wissen, was meine Vorfahren sind: meine Eltern oder die Eltern meiner Eltern oder die Eltern der Eltern meiner Eltern usw. Die Frage ist, wie das mit einer einzigen Formel ausgedrückt werden kann. Bisher haben wir nur eine unendliche Adjunktion

x ist Vojtěchs Vorfahre $\Leftrightarrow$ x gehört zu Vojtěchs Eltern oder … .

Der Zusammenhang mit dem Problem der begrifflichen Erfassung von Zahlen ist folgender: ähnlich wie aus dem Begriff des Elternteils (des direkten Vorfahren) der allgemeine Begriff des Vorfahren abgeleitet werden soll, könnten wir auch aus dem Begriff des unmittelbaren numerischen Nachfolgers ($x+1=y$) den Begriff des (allgemeinen) numerischen Nachfolgers (Ergebnis der n-ten Anwendung der Operation +1) gewinnen. Die Zahl ist dann als Nachfolger der Null, also mit Hilfe der Äquivalenz

x ist Zahl $\Leftrightarrow$ x ist numerischer Nachfolger der Null,

zu erfassen. (Die Null ist der nullte Nachfolger.) Die Lösung ist bekanntlich die Formel:

$$Zx := (\forall X)[X0 \wedge (\forall y)(X(y) \rightarrow X(y+1)) \rightarrow Xx],$$

welche wir mit nur geringer Übertreibung als die eigentliche Grundlage der Entstehung der modernen Logik bezeichnen können. Es ist historisch auch sehr interessant, dass es sich um eine Formel zweiter Stufe handelt, während das heutige Paradigma der Prädikatenlogik erster Stufe eine der Folgen von Russells Antinomie ist.

2. *Was sind und was sollen die logischen Gegenstände?*

Eines ist nun klar: Wenn ich etwas begrifflich ausgliedern will, brauche ich nicht nur (1) den ausgliedernden Begriff, sondern auch (2) den ‚Stoff' oder Bereich, aus dem ich etwas ausgliedern kann. Wir können folglich (1) einen *deskriptiven* von (2) einem *konstitutiven* Teil des logizistischen Programms unterscheiden. Beide müssen mit rein logischen Mitteln (was immer das bedeutet) auskommen. Wenn ich nämlich sage, dass jede Zahl ein Nachfolger der Null ist, bleibt zu erklären, was die Null ist, und wenn ich z.B. sage, dass es die leere Menge ist, muss ich klar machen, was eine Menge ist. Würde ich jetzt antworten, dass sich das von selbst versteht, könnte ich später kaum beanspruchen, die (analytische) Natur der Arithmetik erwiesen zu haben.
So genannte Neologizisten wie C. Wright und B. Hale oder G. Boolos sehen das nicht ein, oder sie wollen es nicht einsehen, weil sie tief in der modelltheoretischen Tradition stecken. Für uns ist aber wesentlich, dass Frege es eingesehen hat. Beachten wir nämlich folgende Verschiebung: Die zentrale Frage der *Grundlagen der Arithmetik*[4] war:

(1) Wie sind uns die Zahlen gegeben?

In den *Grundgesetzen der Arithmetik*,[5] welche die „Verwirklichung" von Ideen der *Grundlagen* darstellen sollen, finden wir aber an Stelle dieser Frage eine andere, und zwar:

(2) Wie sind uns die logischen Gegenstände gegeben?

(Sie wird erst im Anhang gestellt, eigentlich erst im letzten Satz des Buches.) Ich behaupte nun, dass diese Veränderung nichts anderes bezeichnet als den Übergang von einer gelösten *deskriptiven* zu einer offenen *konstitutiven* Frage. Die Zahlen sind uns gegeben durch eine prädikative Bedingung Zx; das ist das endgültige Resultat aus Freges mühseliger Arbeit in den *Grundlagen*. Der deskriptive Teil aber erzwingt den konstitutiven, und es bleibt zu zeigen, was das *Genus* ist, zu welchem die Zahlen die Rolle der auszugliedernden *Species* spielen sollen. Darauf ist die Frage nach den „logischen Gegenständen" gerichtet.
Was sind die logischen Gegenstände? Anhand der *Grundgesetze*-Lektüre können wir zuerst mit Recht sagen: Mengen bzw. Wertverläufe. Jede Menge ist aber eine Menge von etwas. Hier scheint also ein ontologischer Zirkel zu drohen. Frege meint, dieses Problem dadurch zu lösen, dass er nicht beliebige Mengen als logische Gegenstände zulässt, sondern nur Mengen, welche im rein logischen Vokabular beschreibbar sind, zu dem wir auch den Operator {x:Fx} der logischen

4 G. Frege, *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Breslau 1884.
5 G. Frege, *Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet.* Jena 1893, 1901.

(Mengen-) Abstraktion hinzurechnen müssen. (Frege sagt nichts davon explizit. Man muss das aus seinem Vorgehen erraten: in den *Grundgesetzen* sind keine anderen als „reine" Wertverläufe erwähnt, und ihre Abstraktion ist von Anfang an das philosophische Hauptthema.)
Im Unterschied zur Menge aller Bakterien oder aller Menschen sehen die reinen Mengen, z.B. $\{x:x\neq x\}$ oder $\{x:x=x\}$, auf den ersten Blick so aus, als seien sie unabhängig von einem bestimmten Gegenstandsbereich.[6] Das scheint das Problem der ontologischen Zirkularität zu lösen. Dennoch bleibt das Problem der ontologischen Basis oder die Frage, wie uns die logischen Gegenstände gegeben sind, bestehen. Freges endgültiger Entscheidung, die Zahlen explizit als Wertverläufe zu fassen, folgend, müssen wir nur seine berühmte Antwort: „Nur im Satzzusammenhange bedeuten die Wörter etwas!" aus den *Grundlagen* auf die Mengen in den *Grundgesetzen* anwenden: Die logischen Gegenstände sind uns im Satzkontext des so genannten Grundgesetzes V

$$\text{(GV)}\quad \{x:Fx\} = \{x:Gx\} \Leftrightarrow (\forall x)(Fx \leftrightarrow Gx)$$

gegeben.
Die kontextuelle Definition interessiert uns aber zunächst nicht: Uns genügt es zu wissen, dass sie Freges Weg zu einer analytischen ‚Gegenstandsproduktion' ist. Sie ist der Versuch, beides, die Skylla der expliziten – also nichtproduktiven, konservativen – Definition und die Charybdis der schöpferischen – also überproduktiven, allzu liberalen – Definition zu vermeiden.[7]
Die Einschränkung des Grundgesetzes auf die reinen Wertverläufe garantiert, dass wir uns um das elementare Universum (die Uratome) nicht weiter kümmern müssen. Das Grundgesetz hat nun die merkwürdige Eigenschaft, diese ontologische Pflicht auf sich zu nehmen: Fangen wir mit dem Prädikat „$x\neq x$" an, welches sicher keine Ansprüche auf das Universum (der Variable x) erhebt, so gelangen wir mithilfe der Abstraktion zum Ausdruck „$\{x:x\neq x\}$", dessen Angehörigkeit zur Kategorie ‚Eigenname' die Existenz zumindest eines Gegenstandes impliziert. Die Existenz eines Gegenstandes lässt sich aber leicht zur Existenz zweier,

6 Es ist nicht ohne Interesse, dass Frege dieselbe plausibel aussehende, aber fatale Annahme auch im Falle der ‚logischen Wahrheit' machte, wenn er im Gegensatz zu eigenen Lippenbekenntnissen über die normative Natur der Logik den logisch wahren Satz mit einer von allen ‚Gegenständen' geltenden Aussage gleichsetzte. Eben aus diesem Grunde haben alle seine Grundgesetze der Logik die Form eines vollquantifizierten Satzes (also des geschlossenen Satzes ohne nichtlogische Konstanten). Wittgenstein hat in seinem *Tractatus* als einer der ersten eingesehen, dass die schlichte Allgemeinheit („für alle Gegenstände, Begriffe usw.") zur Charakterisierung der *logischen* Wahrheit nicht genügt, weil auch allgemeine Sätze kontingent wahr sein können.
7 Man sollte hier unterscheiden zwischen Freges Theorie einer Kontextdefinition, Russells Theorie unvollständiger Ausdrücke, welche in gewissem Sinne auch konservativ ist (weil Russell unterstellt, dass nichtsubstituierbare Kennzeichnungen leicht aus allen zulässigen Kontexten eliminierbar sind) und Hilberts Theorie der impliziten Definition, welche eigentlich eine explizite Beschreibung bestimmter struktureller Eigenschaften ist.

dreier, ... und zuletzt unendlich vieler Gegenstände ausweiten, und zwar durch die Konstruktion

$\{x{:}x{\neq}x\}[=_{\mathrm{Def}}0]$, $\{x{:}x{=}0\}[=_{\mathrm{Def}}1]$, ..., $\{x{:}x{=}0{\vee}x{=}1{\vee}\ldots x{=}n{-}1\}[=_{\mathrm{Def}}n]$, ...,

welche J. von Neumann später zur Einführung der Ordinalzahlen benutzte. Dass es sich wirklich um verschiedene Objekte handelt, ist nur aufgrund des Grundgesetzes zu zeigen: man fange einfach bei $\neg(\forall x)(x{\neq}x \leftrightarrow x{=}0) \rightarrow 0{\neq}1$ an und gehe dann induktiv mit $\neg(\forall x)(x{=}0{\vee}x{=}1{\vee}\ldots x{=}n{-}1 \leftrightarrow x{=}0{\vee}x{=}1{\vee}\ldots x{=}n) \rightarrow n{\neq}n{+}1$ über. Wenn also jetzt das Grundgesetz V als ein analytisches Prinzip (was immer das bedeutet) erwiesen werden würde, könnte perspektivisch auch das Programm der logischen Arithmetik erfolgreich zu Ende geführt werden: wir hätten einen wahren und dabei inhaltsleeren Satz, welcher die Existenz unendlich vieler Gegenstände induziert, was technisch betrachtet mehr als genug ist.

Frege selbst hat lange an der analytischen Natur des Grundgesetzes V gezweifelt. Sicher kam ihm aber nie die Möglichkeit in den Sinn, dass es das echte Gegenteil eines analytischen Prinzips ist – nämlich ein Prinzip, das sich selbst widerspricht. Aus der Definition des Prädikates

$W(x){:=}(\exists F)(x{=}\{x{:}Fx\}{\wedge}\neg Fx)$

können wir nämlich anhand des Grundgesetzes einen Widerspruch mit der Voraussetzung, dass der Satz $W\{x,Wx\}$ einen und nur einen einzigen Wahrheitswert hat, ableiten, und zwar so, dass wir in der Entwicklung: $W\{x{:}Wx\}$, $(\exists F)(\{x{:}Wx\}{=}\{x{:}Fx\}{\wedge}\neg F\{x{:}Wx\})$ eine existenzielle Spezifikation von F einsetzen und dann von $\{x{:}Wx\}{=}\{x{:}Fx\}$ zu $(\forall x)(Fx{\leftrightarrow}Gx)$, und endlich von $\neg F\{x{:}Wx\}$ zu $\neg W\{x{:}Wx\}$ übergehen. Die komplementäre Ableitung von $W\{x{:}Wx\}$ aus $\neg W\{x{:}Wx\}$ ist von dem Grundgesetz V und von jedem anderen Grundgesetz unabhängig.

Russells Diagnose dieser Antinomie ist: Die Paradoxie folgt aus der ‚imprädikativen' Natur des behandelten Grundgesetzes V. Links wird in ihm etwas eingeführt, was rechts schon als möglicher Variablenwert unterstellt ist. Also: „Es definiert etwas mithilfe einer Totalität, welche dieses Etwas schon in sich umfasst". Russells ‚Medizin' ist ebenfalls bekannt, nämlich die neuen Objekte (Mengen) von den ursprünglichen (den Werten von x) zu trennen, also die Substituierbarkeit der Mengenterme „$\{x{:}Fx\}$" für „x" zu verbieten.

Mit dieser Korrektur verschwindet zwar der Widerspruch, und Freges Prinzipien sind dann untereinander formal konsistent. Das Grundgesetz V verliert aber alle oben aufgezählten Vorteile: Die logischen Gegenstände sind jetzt nicht nur der Natur, sondern auch der Anzahl nach abhängig von den Gegenständen des ursprünglichen Universums. Um eine Rekonstruktion der Arithmetik in dieser Richtung weiterzuführen – mit anderen Worten: ihren *internen* Sinn zu retten –, muss man weitere „ontologische" Postulate wie Russells Unendlichkeitsaxiom akzeptieren. Damit verliert man aber endgültig den *externen* Sinn. Statt dessen gewinnt man auf komplizierten Umwegen etwas relativ Einfaches – natürliche Zahlen.

3. Die Auferstehung in Hilberts Hotel

Einer der wesentlichen Gedanken des Neofregeanismus besteht nun darin, die Schuld an der Ableitung der Russellschen Antinomie nicht mehr der Imprädikativität von Grundgesetz V zu geben. Es sei nicht die Imprädikativität, wodurch das Grundgesetz paralysiert wird, sondern die spezifische Äquivalenz zwischen den Begriffen F, G auf der rechten Seite. Wird diese Extensionsgleichheit durch eine gröbere Äquivalenz – speziell durch die Gleichheit ihrer Anzahlen (Gleichzahligkeit, symbolisch „F eq G"[8]) – ersetzt, erhalten wir ein imprädikatives Gesetz, das so genannte *Humesche Prinzip:*

(HP) $NxFx{=}NxGx \Leftrightarrow F \text{ eq } G$,

aus welchem (1) der Widerspruch in der oben erwähnten Weise unableitbar ist (man kann einfach nicht mehr aus $NxWx{=}NxFx$ auf $\neg W(NxWx)$ schließen), und welches (2) alle Vorteile des Grundgesetzes V behält. Es ist vielleicht nicht nötig zu betonen, dass diese Vorteile gerade mit der von Russell verbannten Imprädikativität (der Möglichkeit, das Prädikat „$x{=}NxFx$" zu bilden) zu tun haben.

Dieses Manöver wurde von Frege selbst vorgeschlagen. Denn es war ursprünglich das Humesche Prinzip, nicht Grundgesetz V, das am Anfang der analytischen Rekonstruktion von Arithmetik stehen und der Satzzusammenhang sein sollte, worin die Zahlen gegeben sind. Crispin Wright hat überdies gezeigt, dass aus HP allein in der Logik zweiter Stufe alle Axiome der *Peano-Arithmetik der zweiten Stufe* (PA2) deduktiv ableitbar sind, also: die quantifizierte Zahlen-Definition $(\forall xZx)$ oder das Induktionsaxiom:

(AI) $(\forall X)[X0 \wedge (\forall y)(X(y) \rightarrow X(y{+}1)) \rightarrow (\forall x)Xx]$,

sowie zwei Forderungen an die Nachfolgerfunktion +1:

(P1) $x{+}1{\neq}0$ (dass sie nichts der Null zuordnet)
(P2) $x{+}1{=}y{+}1 \rightarrow x = y$ (dass sie injektiv ist).

Boolos schlägt vor, diese Tatsache als ‚Freges Theorem' zu bezeichnen, und zeigt – mit Hilfe von R. Heck Jr. –, dass Frege die relevanten Ableitungen schon in seinen Grundgesetzen selbst realisiert hat, und zwar derart, dass die Anwendung des inkriminierten Grundgesetzes V immer eliminierbar ist. Diese unbestreitbaren Erfolge veranlassen Boolos dann zu sagen, Frege hätte sich gleich nach der Entdeckung des Paradoxes in Hilberts Hotel einquartieren sollen, was – einfacher gesagt – die Aufforderung formuliert, Freges Logizismus in Richtung des Dedekindschen Logizismus umzudeuten.[9]

8 Explizit geht es um die Relation $(\exists R)[(\forall x)(Fx \rightarrow (\exists!y)(Gy{\wedge}xRy)) \wedge (\forall y)(Gy \rightarrow (\exists!x)(Fx{\wedge}xRy))]$.

9 Siehe G. Boolos, „The Consistency of Frege's Foundations of Arithmetic", in: J. Thomson (Hg.), *On Being and Saying: Essays in Honor of Richard Cartwright*, Cambridge, Mass. 1987, 3-20. Eine repräsentative Auswahl der neologizistischen Untersuchungen bieten

Der Logizismus Dedekinds bemüht sich, dem konstitutiven Teil des logizistischen Programms – also der Frage nach der Gegebenheit der logischen Gegenstände – dadurch auszuweichen, dass er die Zahlen nicht durch ein *Prädikat* aus einem *konkreten* Gegenstandsbereich (welchen man im voraus beschreiben müsste), sondern durch eine *Formel* aus *allen möglichen* Bereichen als den Gegenstandsbereich einer gewissen (strukturellen) Eigenschaft – nämlich derjenigen, welche durch PA2 bestimmt wird – ausgliedert. Die drei Axiome von PA2 bzw. ihre Konjunktion sollen hier also als die so genannte „implizite Definition" Hilberts funktionieren – so kann Boolos' Rede von ‚Hilberts Hotel' auch gedeutet werden.

Das interne Problem einer impliziten Definition – auf das übrigens schon Frege selbst in seiner Diskussion mit Hilbert hingewiesen hat, zumindest in Stekeler-Weithofers Interpretation[10] – besteht darin, dass sie nicht *einen einzelnen* Bereich, sondern nur verschiedene Bereiche mit *einer gemeinsamen strukturellen* Eigenschaft bestimmen kann. Dass PA2 wenigstens in diesem speziellen Sinne eindeutig (mit anderen Worten: kategorisch) ist, hat Dedekind explizit bewiesen. Genauer gesagt: er hat bewiesen, dass, *wenn* PA2 Modelle hat, sie strukturell identisch sind. Damit haben wir die Bedingung der *Eindeutigkeit*.[11] Es bleibt aber zu zeigen, dass es so etwas wie ein Modell für PA2 überhaupt gibt. Das ist die Bedingung der *Existenz*.

Dedekind sei zumindest zugute gehalten, dass er diese Bedingung als zentral für das ganze logizistische Projekt anerkannt hat, wenn er in der weiteren Analyse zeigt, dass sie mit dem Postulat der Existenz einer unendlichen Menge äquivalent ist.[12] Um die analytische Arithmetik zu retten, muss man also abermals eine

folgende Sammelbände: W. Demopoulos (Hg.), *Frege's Philosophy of Mathematics*, Cambridge, Mass. 1995; G. Boolos, *Logic, Logic, and Logic*, Cambridge, Mass. 1998; M. Schirn: *The Philosophy of Mathematics Today*, Oxford 1998.

10 Vgl. P. Stekeler-Weithofer, *Grundprobleme der Logik. Elemente einer Kritik der formalen Vernunft*, Berlin 1986, 380ff.

11 Das ist für Frege selbstverständlich nicht gut genug, wie es sein Problem des Julius Caesar zeigt: Nach Fregeschen Standards muss ich wenigstens im Prinzip wissen, ob die Null und Julius Caesar dieselbe oder verschiedene Gegenstände sind. Dedekind versuchte das Problem so zu lösen, dass er das Zahlensystem aus allen strukturell identischen Bereichen herausabstrahieren wollte, und zwar als Bereich derselben strukturellen Eigenschaften, welcher aber keine spezifischen *materiellen* Eigenschaften hat. Er musste dann zwar nicht wie Frege oder Cantor erklären, warum seine Zahlen mehr Eigenschaften als erforderlich haben (z.B. dass $0 \in 1$ bzw. $0 \subseteq 1$), die vage, weil psychologische Beschaffenheit dieser Abstraktion machte seinen Ausweg aber letztendlich wertlos.

12 Genauer gesagt: sie ist äquivalent der Existenz einer Dedekindsch unendlichen Menge, d.h. einer unendlichen Menge plus der injektiven Funktion, welche diese Menge auf eine echte Teilmenge abbildet. Die Begriffe der Dedekindschen und der schlichten Unendlichkeit sind äquivalent unter der Voraussetzung des Auswahlaxioms. Wenn uns nun dieses Axiom zur Verfügung steht, können wir leicht aus der unendlichen Menge solche Dedekindsch unendlichen Mengen heraustrennen, deren Elemente Nachfolger eines einzigen ausgezeichneten Elementes (0) in der durch die Anwendung der injektiven Funktion (s) bestimmten Reihe sind. Diese – von Dedekind ‚einfach unendlich' genannte – Menge ist gerade das intendierte Modell für Peanos Axiome.

unendliche Menge als ‚analytisch gegeben' verteidigen. Ein Beispiel für solche Mengen, das in irgendeinem Sinne elementarer als die natürlichen Zahlen wäre, ist aber schwer zu finden. Dedekinds eigene Versuche, unter Rückgriff auf eine Idee Bolzanos die unendliche Folge

(a) a
(S) a ist der Gegenstand meines Denkens
(SS) der Satz (S) ist der Gegenstand meines Denkens
usw.

(wahrscheinlich in unserem Denken) zu konstruieren, wirken eher wie eine *reductio ad absurdum* des logizistischen Unternehmens als wie dessen Absicherung. Nicht ohne Grund baut auch der Boolossche modelltheoretische Beweis für die Konsistenz des Humeschen Prinzips auf dem arithmetischen Modell der natürlichen Zahlen auf.[13]

4. *Circulus vitiosus und unendliche Formeln*

Im Lichte der neologizistischen Entdeckungen konnte man immerhin glauben, dass wenigstens der deskriptive Teil des Programms gelungen sei, so dass wir, wenn wir die einzelnen Zahlen als gegeben unterstellen, fähig sind, sie mit Hilfe des Prädikates Zx, also des Ausdruckes

$$(Zx)\quad (\forall X)[X0 \wedge (\forall y)(X(y) \rightarrow X(y+1)) \rightarrow Xx]$$

als ein Ganzes zu erfassen. Man sollte wissen, dass es sich dabei um eine nichttriviale Angelegenheit handelt, welche z.B. im Rahmen der Logik erster Stufe keine Lösung hat, wenn wir nicht so etwas wie die unendliche Formel ‚$x=0 \vee x=1 \vee$ usw.' akzeptieren.

Wie wissen wir nun, dass die Fregesche Formel Zx korrekt ist? Von einer Eigenschaft X zu sagen, dass sie sich in einer durch die Operation +1 bestimmten

13 Boolos' Hinweis auf ‚Hilberts Hotel' bezieht sich eigentlich in erster Linie auf diese Modellkonstruktion. Im Hilbertschen Beispiel eines Hotels, wo alle mit natürlichen Zahlen bezeichneten Zimmer schon belegt sind, bekommt ein neuer Gast doch ein solches Zimmer: es genügt, jeden bereits einquartierten Gast von Zimmer *n* nach Zimmer $n+1$ umziehen zu lassen. In Boolos' Reinterpretation von Humes Prinzip als einer impliziten Definition (zweiter Stufe) muss man eine Menge A und eine Funktion von einer Potenzmenge von A nach A finden, welche den gleichzahligen Untermengen von A dasselbe Element und den ungleichzahligen Untermengen die verschiedenen Elemente von A zuordnet (diese Funktion ist die modelltheoretische Interpretation des Kardinaloperators N aus HP). Wenn A eine endliche Menge von *n* Elementen 0, 1, 2, ..., $n-1$ ist, kann man jeder ihrer Untermengen von *m* Elementen das Element *m* zuordnen, und doch bleibt die Untermenge von *n* Elementen – also die Menge A selbst – übrig. Im Falle einer unendlichen Menge 0, 1, 2, ... stellen diese Überbleibsel alle unendlichen Untermengen dar, welche aber zugleich untereinander gleichzahlig sind. Man kann also wie im Hilbertschen Hotel vorgehen und so ein Modell für HP gewinnen.

Reihe vererbt, bedeutet zu behaupten, dass wir aus X(y) auf X(y+1) schließen können. Zx gemäß wird nun etwas Zahl genannt, wenn es alle sich vererbenden Eigenschaften der Null hat. Es ist klar, dass ein Gegenstand, der ‚wirklich' ein Nachfolger der Null ist, zu dem man also durch endlich viele Anwendungen der Operation +1 von der Null anfangend gelangen kann, alle sich vererbenden Eigenschaften der Null hat. Die umgekehrte Richtung ist komplizierter: Warum könnte es nicht einen Gegenstand geben, welcher alle sich vererbenden Eigenschaften der Null hätte und dennoch kein ‚wirklicher' Nachfolger der Null wäre?

Das übliche Argument sieht folgendermaßen aus: wenn wir die Eigenschaft ‚x ist eine Zahl' nehmen, sehen wir, dass sie (1) für die Null gilt und dass sie (2), wenn sie für x gilt, auch für x+1 gilt. Damit ist das Antezedens von Zx erfüllt, und wir können schließen: $\forall x(Zx \leftrightarrow x \text{ ist Zahl})$. Aber ist das nicht ein Zirkelschluss? So ist es: Um Zx anwenden zu können, müssen wir zuerst ein Prädikat F finden, welches von allen und nur von allen ‚wirklichen' Nachfolgern der Null – also den natürlichen Zahlen – gilt. Hätten wir ein solches Prädikat, wäre so etwas wie Zx vollkommen nutzlos!

Diese Beobachtung ist ganz unabhängig von der Frage nach der Prädikativität oder Imprädikativität von Zx (das Prädikat Zx kann ja Wert der Variable X sein) gültig, denn wir können es ganz leicht in einen prädikativen Ausdruck umformen. Die Werte von X wären dann Prädikate eines bestimmten fixen Vokabulars erster Stufe, also von Zx selbst verschieden. Trotz seiner formalen Zirkelfreiheit ist Zx, auch wenn es gilt, notwendigerweise *informal* defekt, und zwar aus demselben Grund: wir unterstellen stillschweigend das, was wir beweisen wollen. Dass die prädikative Version von Zx letztendlich *nicht* funktioniert, impliziert, dass es gerade auch solche Gegenstände geben kann, welche alle sich vererbenden Eigenschaften der Null haben und zugleich keine ‚wirklichen' Nachfolger der Null sind. Damit marschieren die so genannten Nonstandard-Zahlen in die Mathematik und Metamathematik ein. Dass wir dies heute weniger als Fiasko denn als Entdeckung ansehen, zeugt von einem bemerkenswerten historischen Gedächtnisschwund.

Ramsey[14] hat als einer der ersten bemerkt, dass die in der logizistischen Arithmetik zahlreichen imprädikativen Definitionen wie Zx (oder die des minimalen Abschlusses sowie der reellen Zahlen) nicht mehr zirkulär sind und sich die erwünschte Kraft erhalten, wenn man statt über Eigenschaften über Mengen quantifiziert, also zwischen der Definition des auszugliedernden Prädikats und der Menge, welche es ausgliedern soll, unterscheidet. Wie rational ein solches Vorgehen auch aussehen kann – und es ist in demselben Sinne rational wie die früher erwähnte Umformung eines imprädikativen Ausdrucks in einen prädikativen –,[15] so bleibt uns Ramsey doch die Erklärung dafür schuldig, warum wir eigentlich an einer Definition wie Zx festhalten sollten.

14 F.P. Ramsey, „The Foundations of Mathematics", in: *Proceedings of the London Mathematical Society*, Ser. 2, Vol. 25, Part 5, 1926, 338-384.

Die mögliche Antwort kann man sich leicht vorstellen: weil es die einzige exakte Möglichkeit sei, die Zahlen zu beschreiben und dabei die unendliche Konstruktion 0, 0+1, 0+1+1, ... bzw. die unendlichen Formeln zu vermeiden. Ist aber die Voraussetzung der Existenz der unendlichen Menge aller und nur der natürlichen Zahlen, dank welcher das Prädikat Zx korrekt ist, letztlich etwas anderes als das, was die unendliche Formel ‚$x=0 \vee x=1 \vee$ usw.' ausdrückt? Ist der Ausdruck ‚beliebige Teilmenge der natürlichen Zahlen' wirklich anders zu verstehen als „die unendliche Formel ‚$x=5 \vee x=67 \vee$ usw.'", bei dem das ‚usw.' keine befolgbare Regel repräsentiert, bei dem also nicht klar ist, ‚wie weiter'?

Das alles soll weder eine Kritik an der Rede von beliebigen Teilmengen noch an der Rede von unendlichen Formeln sein. Es geht nur um die Beobachtung, dass keine der beiden Redeweisen ‚vager' oder ‚exakter' ist als die andere, was aber auch keine Überraschung ist. Denn es ist hinreichend bekannt, dass die Logiken zweiter Stufe und die Logiken unendlicher Formeln dieselben formalen Eigenschaften haben (Ungültigkeit des Satzes von Löwenheim-Skolem, des Kompaktheitssatzes usw.).

Die große Ausdruckskraft solcher Systeme (die Kategorizität von PA2) vereitelt aber die wichtigsten Zielsetzungen des logizistischen Programms Freges, nämlich

(1) die effektive Überprüfbarkeit aller Voraussetzungen

und

(2) die effektive Überprüfbarkeit des Schließens.

(1) gilt, weil das früher Unausdrückbare sich jetzt lediglich in den großzügig gebrauchten Variablen versteckt, und (2) gilt, weil eine Logik zweiter Stufe deduktiv unvollständig ist.

Das bedeutet den endgültigen Tod für den deskriptiven Teil des logizistischen Programms und damit auch für das Luftschloss einer allein auf Begriffe gegründeten Arithmetik. Sehr wahrscheinlich gelangte auch Frege selbst zum Bewusstsein der Unvereinbarkeit all seiner diesbezüglichen Forderungen, was sein langjähriges Schweigen zumindest partiell erklären würde.

15 Gemeint ist, dass Ramseys Unterscheidung nicht notwendig platonistische Konsequenzen (wie die Existenz prinzipiell unbenennbarer Gegenstände) haben muss. Es geht nur um eine relative Differenzierung zwischen strikter und liberaler Ausdrucksbildung.

5. *Rekursion als Regel, Arithmetik als Regelfolgen*

Kategorisch zu behaupten, dass der Logizismus tot ist, verletzt den elementaren Grundsatz der Charity: Die logizistische Bewegung lebt selbstverständlich in ihren Folgen fort, zu denen in gewissem Sinn die moderne Logik insgesamt gehört. Der Logizismus ist aber – und das ist das Ergebnis meiner Überlegung – gerade in den Punkten gescheitert, an denen die Neologizisten an ihn anknüpfen wollen. Die Wiederbelebung zielt nicht in die richtige Richtung. Recht verstanden hat auf die Frage ‚Was sind die Zahlen?' die Antwort ‚0, 1, 2, usw.' einen guten Sinn. Die Antwort ‚Die Zahlen bilden die kleinste Menge, abgeschlossen unter der Operation +1' aber nicht. In diese Richtung zielen auch die Bemerkungen Wittgensteins über die Grundlagen der Arithmetik vom Typ: „Du willst die Arithmetik begründen; lehre sie, dann hast du sie begründet."
Es ist bezeichnend, dass die meisten logizistischen Schriften über das eigentliche Rechnen, über das Operieren (Addieren, Multiplizieren) mit Zahlen, das jedes Schulkind mit der Arithmetik verbindet, nichts sagen. Vom technischen Standpunkt ist das vielleicht verständlich: die elementaren Rechenoperationen sind in Peanos Arithmetik zweiter Stufe (im Unterschied zur Arithmetik erster Stufe, in der man sie axiomatisch einführen muss) mithilfe der Methode des minimalen Abschlusses definierbar: + ist die kleinste Funktion derart, dass gilt

(R1) $x+0=x$,
(R2a) wenn $x+y=z$, so $x+(y+1)=z+1$,

was in eine einzige Formel umgeschrieben ergibt

(R2b) $x+(y+1)=(x+y)+1$.

In den Formeln (R1), (R2b) haben wir die so genannte *rekursive Definition* des Addierens.
Diese Art des Definierens reicht aber dem Logizismus aus demselben Grunde nicht, aus dem ihm die Definition

(Z1) 0 ist Zahl
(Z2) wenn x eine Zahl ist, so ist auch x+1 eine Zahl

nicht genügt: ihre zweiphasige Form verweist nämlich auf die unendliche Konstruktion. Das logizistische Exaktheitskriterium verlangt eine explizite Definition in der Form einer einzigen (endlichen) Formel, in diesem Fall:

$$(Axyz)\ (\forall g)\{(\forall u,v)[g(u,0)=u \wedge g(u,sv)=sg(u,v)] \rightarrow g(x,y)=z\}.$$

Wir haben aber gesehen, dass solche Formeln das Verständnis des rekursiven Definierens notwendig schon voraussetzen. Wir müssen wissen, dass einer der Werte der Variable *g* die Funktion des ‚wirklichen' Addierens ist. Der faktische Unterschied zwischen den beiden Definitionen besteht also nur darin, dass in der einen *explizit* gesagt werden muss, was in der anderen nur *implizit* gezeigt wird,

nämlich dass die Klasse der zu spezifizierenden Gegenstände (Zahlen, Tripel usw.) die kleinste ist. Das drückt Zx explizit aus, während (Z1-2) es voraussetzen, indem sie ‚x' als eine Variable bestimmen, die sich nur auf das bisher Konstruierte bezieht (die so genannte ‚Eigenvariable').
In der ‚höheren' Arithmetik wird dieser Unterschied bedeutsamer: es handelt sich hier um den Unterschied zwischen dem aktuellen und dem potenziellen Unendlichen, also zwischen dem Unendlichen, welches thematisiert ist, und dem Unendlichen, welches nur als die Form der Rekursion auftritt (wie Kant meinte), zwischen der klassischen und der konstruktiven Logik und Arithmetik.
Aus einer anderen Perspektive, welche für das Verständnis vieler Stellen der *Grundlagen* entscheidend ist, sieht die ganze Situation folgendermaßen aus: Der Logizismus versucht arithmetische Funktionen als Funktionen unter anderen anzusehen (bzw. von anderen zu unterscheiden). Die Rekursion ist für ihn nicht die kanonische, sondern eine sehr spezielle Art des Benennens. Bevor eine rekursive Definition als korrekt angenommen werden darf, muss man beweisen, dass sie funktioniert. Genau das ist die Aufgabe des Rekursionstheorems, mit dem Dedekind (aber auch Frege, wie unlängst R. Heck nachgewiesen hat)[16] zeigen, dass Rekursionsgleichungen wie (R1), (R2b) eine und nur eine Funktion auf dem einfachen unendlichen Bereich (also dem Bereich, welcher die Struktur der natürlichen Zahlen hat) beschreiben. Logizisten halten also rekursive Definitionen für *Kennzeichnungen* (definite descriptions).
Der Konstruktivismus der Erlanger Schule – und der übliche Rechner – sieht dagegen die beiden Gleichungen (R1), (R2b) bzw. die Regeln (R1), (R2a) als die elementarste Weise an, eine Funktion, verstanden als Verfahren der korrekten Berechnung, auszudrücken. Aus dieser Perspektive scheint es vollkommen sinnlos, einen Beweis dafür zu verlangen, dass rekursive Gleichungen eine Funktion bezeichnen: Sie sind ja die *Eigennamen*, welche ‚die Denotate' – befolgbare Rechenanweisungen – trivialerweise besitzen.
Man kann sich die Sache leicht am Beispiel der Rekursionstheorie vergegenwärtigen, der zufolge die so genannten rekursiven Funktionen einfach syntaktisch – also über ihre Namen – beschrieben sind, wobei zu den elementaren Formen ihrer Bildung auch die primitive Rekursion – vermittels der oben erwähnten rekursiven Gleichungen – gehört. Vom Beweis eines Rekursionstheorems kann hier nicht sinnvoll die Rede sein, zumindest nicht ohne wesentliche Umformungen der ganzen Theorie in eine logizistische (mengentheoretische) Richtung, wie es in der so genannten verallgemeinerten Rekursionstheorie geschieht.[17]

16 Siehe R. Heck Jr., „Definition by Induction in Frege's *Grundgesetze der Arithmetik*", in: W. Demopoulos (Hg.), *Frege's Philosophy of Mathematics* (Anm. 9), 295-333.
17 Daran, wie verschieden man rekursive Gleichungen auffassen kann, ist auch leicht zu erkennen, wie vage das so genannte ‚Fregesche Problem' meistens dargestellt wird, nämlich die Frage, ob die Eigennamen – genau wie Kennzeichnungen – Sinn (und nicht nur Bedeutung) haben, oder ob sie als so genannte ‚rigide Designatoren' aufzufassen sind. Ob ein Ausdruck ein Name oder eine Kennzeichnung ist, hängt erstens von seinem Ge-

Wenn Frege am Anfang seiner *Grundlagen* Grassmann beschuldigt, die Addition bloß durch rekursive Gleichungen und mithin nicht korrekt darzustellen, dann scheint er nicht zu bemerken, dass es sich hier nur um eine andere Version desselben Problems handelt, welches ihn selbst einige Seiten weiter plagen wird, nämlich: „Wie sind uns die arithmetischen Objekte (Zahlen, Funktionen, usw.) gegeben?“ Dass er sich letztendlich entschließt, die Frage nach der Gegebenheit von arithmetischen Objekten auf die Frage nach der Gegebenheit logischer Objekte zu reduzieren, können weder Grassman noch der unbelehrte Leser ahnen. Auch wenn sie es wüssten, läge die Verteidigungspflicht für dieses Manöver bei Frege.

6. Schluss

Der Logizismus unterschätzt den praktischen, kalkulatorischen Charakter der Arithmetik: Induktive Definitionen lassen sich aus den Grundlagen nicht sinnvoll eliminieren. Man muss sie als einfache Definitions- und Beweismittel beibehalten. Eine bewusst in dieser Richtung rekonstruierte Wissenschaft ist dann dem Programm Lorenzens gemäß als Regeltheorie aufzufassen, also als eine Theorie, welche die Ableitbarkeit theoretischer Sätze in gewissen Regelsystemen – Kalkülen – systematisch untersucht. Arithmetische Sätze sind Sätze über die Konstruierbarkeit arithmetischer Ausdrücke nach gewissen Regeln.[18] (Die Gleichsetzung der arithmetischen Praxis mit dem Regelfolgen ist auch mit dem Namen des späten Wittgenstein verbunden, obwohl die Idee schon im *Tractatus* – vor allem in seinem Begriff der *internen Operation* – zu finden ist.)

Die Tatsache, dass man wahre arithmetische Sätze im Unterschied zu wahren Sätzen der Logik (erster Stufe) nicht kalkülisieren kann (die berühmten Vollständigkeits- und Unvollständigkeitssätze von Gödel), zeigt nun in Lorenzens Deutung, dass die Arithmetik nicht eine auf der axiomatischen Methode, sondern eine auf Konstruktion – Synthesis – beruhende Wissenschaft ist. Das ist eine dem Logizismus entgegengesetzte These. Doch auch nach Lorenzen sind beide Disziplinen – Logik und Arithmetik – in gewisser Hinsicht nicht sehr weit voneinander entfernt: beide müssen sich im Grunde mit dem bloßen Operieren mit Symbolen begnügen, sind also in diesem Sinne ganz *formal*. Da derartige Operationen nicht empirisch, sondern normativ (nach Regeln) gedeutet werden,[19] sind beide *formal apriori* gültig, die erste aber – weil sie mit ganzen Sätzen, also diskursiv operiert – *analytisch*, die zweite, der die einfache Zahl(zeichen)konstruktion 0, 1, 2, … (oder |, ||, |||, …) zugrunde liegt, *synthetisch*.

Den Kritikern des Logizismus muss man entgegenhalten, dass die schlichte Apotheose der Praxis, wie wir sie auch bei Wittgenstein finden, die Tatsache leicht verschleiern kann, dass die logizistische Übersetzung der arithmetischen Sätze in ein allgemeineres, strukturalistisches Vokabular es oft erst ermöglicht, die Beziehungen zu sehen, welche dem Auge des bloßen Praktikers verborgen bleiben. Die topologischen Untersuchungen Cantors z. B. gestatten Eigenschaften verschiedener Bereiche zu vergleichen und mithilfe solcher Vergleiche auch den Begriff der reellen Zahl, welcher bis dahin unbestimmt und unbestimmbar war, mitzudefinieren. Cantors diesbezügliche Untersuchungen können als Paradebeispiel für die von Lorenzen oft betonte wechselseitige Stützung zwischen Theorie und Praxis dienen. Die Praxis verkörpern in diesem Beispiel die Arithmetiken der natürlichen und rationalen Zahlen.

Was Logizismus und Konstruktivismus besonders klar verbindet, ist das programmatische Streben nach dem Verständnis mathematischer Rede, nach der Begründung ihrer Wahrheit und ihrer Sinnkriterien. Weder Logizismus noch Konstruktivismus formulieren z. B. das Induktionsprinzip als ein unbegründetes und im Grunde unbegründbares Axiom, um dann wie zufällig zu entdecken, dass es – als Schema erster Stufe oder substitutionell interpretiert – auch andere (Nonstandard-)Modelle haben kann. Beide haben im Unterschied zur heutigen Praxis Recht zu betonen, dass die Induktion einfach *per definitionem* für die Zahlen gilt, weil die Zahlen schon induktiv definiert sind. Dass es unter Umständen auch andere ‚Zahlen‘ als die gewöhnlichen gibt, ist selbstverständlich kein arith-

brauch ab; derselbe Ausdruck kann in verschiedenen Kontexten verschiedene Rollen spielen. Die Frage nach seinem Sinn als einem (absoluten) Merkmal führt in den Psychologismus. Zweitens ist jetzt Folgendes klar: wenn wir die (indefinite und relative) Klasse der Eigennamen nicht syntaktisch, sondern gebrauchstheoretisch charakterisieren, dann haben die Namen – zu denen dann auch komplexe Ausdrücke wie rekursive Gleichungen bzw. Regeln oder Dedekindsche bzw. Cantorsche Benennungen der reellen Zahlen gehören – ganz trivial einen Fregeschen Sinn. Wie Stekeler-Weithofer in seinen *Grundproblemen* 337 ff. ausgeführt hat, müssen wir vieles kennen und können (nach Regeln operieren, die Arithmetik der rationalen und natürlichen Zahlen beherrschen usw.), bevor wir die relevanten Ausdrücke als Namen zu erkennen fähig sind. Die relevante Frage ist vielmehr, wie sich dieses „Namen-Kennen“ von einem „Kennzeichnungs-Kennen“ unterscheidet.

18 Man begründet die elementaren Sätzen der Arithmetik so, dass man sie als Ableitbarkeitsurteile interpretiert, also: der Satz ‚2+2=4‘ ist wahr dann und nur dann, wenn diese Zeichenfolge in dem die Addition definierenden Kalkül ableitbar ist. Um ihn zu begründen, braucht man nur die Ableitung zu zeigen. Das entscheidende Problem entsteht mit der Negation: was soll man zeigen, wenn man den Satz 2+3≠4 behaupten will? (Das ist Russells und Wittgensteins Problem der negativen Sachverhalte.) Lorenzen wendet hier ein neues Konzept der Logik an, welches den Fregeschen Akt des Behauptens (anders als Frege) ernst nimmt und als Begründungsverpflichtung gegenüber den potenziellen Diskussionsteilnehmern deutet. Zur Behauptung (des Proponenten) gehört also unzertrennlich auch die Aufforderung (des Opponenten), diese Behauptung zu verteidigen, was sich im Falle der Negation (eines elementaren) Satzes A auf die schlichte Behauptung von A reduziert. Einer der Gesprächspartner muss also die konkrete Ableitung zeigen, womit der Dialog über die Wahrheit des negativen Satzes endet.

19 Wenn man z. B. sagt, dass die Zahlen abstrakte – also nicht in Raum und Zeit lokalisierbare – Gegenstände sind, meint man damit im günstigsten – nichtplatonistischen – Fall, dass uns nur die operativen und nicht die empirischen Züge ihrer Repräsentation (durch Zahlzeichen) interessieren.

metisches (oder gar naturwissenschaftliches) Faktum, sondern markiert eine wesentliche Lücke in der arithmetischen Grundlagenforschung, welche zeigt, dass die bloß logische Konsistenz für eine sinnvolle Begründung der Arithmetik nicht genügt. Der Logizismus hat wie gesagt nicht mit der Idee der Konsistenz, sondern mit dem Rekursionstheorem argumentiert.
Unter dem Strich können wir sagen: Wenn es auch Frege und seinen Zeitgenossen nicht gelang, das Konzept der rein analytischen Arithmetik und damit der Logik als einer notwendigen *und* hinreichenden Grundlage arithmetischer Untersuchungen auszuweisen, so machten sie sie wenigstens zu einem *notwendigen* Bestandteil des mathematischen Curriculums, wodurch die etablierten Felder des mathematischen Diskurses nicht nur kontrollierbarer, sondern darüber hinaus auch wesentlich erweitert werden. Die Metamathematik mit all ihren Ergebnissen stellt eine Disziplin dar, von deren Möglichkeit und von deren Methoden vor hundert Jahren niemand eine Ahnung haben konnte.[20]

Dr. Vojtěch Kolman, Institut für Logik, Philosophische Fakultät der Karlsuniversität in Prag, Celetná 20, 11000 Prag; e-mail: Kolmann@post.cz

20 Dieser Artikel entstand mit Unterstützung eines Forschungsstipendiums der Alexander von Humboldt-Stiftung und im Rahmen des Forschungsprojekts MSM 0021620839 des Ministeriums für Bildung der Tschechischen Republik. Der Autor möchte Dr. Henning Tegtmeyer für wertvolle Vorschläge und Korrekturen danken.

BERICHTE UND DISKUSSIONEN

‚Sichtbilder', Seelenruhe und gottgleiches Leben. Ein Bericht zum gegenwärtigen Stand der Epikurforschung

Katharina Held, Bonn

Seit einigen Jahren beschäftigt sich die Öffentlichkeit wie auch die Forschung wieder zunehmend mit Autoren der Spätantike und des Hellenismus – die Auseinandersetzung mit den Autoren dieser Epochen beginnt die Fokussierung auf Platon und Aristoteles abzulösen. Die neuere Forschung wird nicht nur auf dem Gebiet des Neuplatonismus und der Stoischen Philosophie wieder intensiv vorangetrieben; gleiches gilt auch für den Epikureismus. Dass die Epikureische Philosophie immer noch ein bedeutsames Arbeitsfeld ist, hat zwei Gründe: Erstens, weil die Untersuchungen in Herculaneum nicht abgeschlossen sind, da einige der Papyri noch immer nicht vollständig entrollt und entziffert sind, zweitens auch, weil Epikurs schwierige Begrifflichkeiten und im Besonderen seine Lustkonzeption stets aufs Neue für Debatten sorgen.
Der vorliegende Bericht über neuere Forschungsergebnisse zum Epikureismus gliedert sich in fünf Hauptabschnitte. In den ersten beiden werden einige Standardausgaben sowie neuere umfassende Werke zum und über den Epikureismus vorgestellt (1-2); Abschnitt 3 erläutert die wichtigsten Aufsatzbände, in denen sich Experten der Antiken und Hellenistischen Philosophie mit einzelnen Aspekten des Epikureimus beschäftigen; Abschnitt 4 betrachtet zwei neuere Monographien; Abschnitt 5 setzt sich zum Abschluß mit einigen zentralen neueren Aufsätzen auseinander.

1. Textausgaben und Übersetzungen

Beschäftigt man sich heute mit dem Epikureismus, sind noch immer Herrmann Useners 1887 erschienene und 1963 neu aufgelegte *Epicurea* [1] mit griechisch-lateinischem Text maßgeblich – wenn auch ergänzungsbedürftig durch die von Graziano Arrighetti verbesserte, 1960 erschienene und in den 70er Jahren überarbeitete griechisch-italienische Ausgabe der Fragmente [2]. Da Usener berechtigterweise nur das in seine Sammlung aufnahm, was zum Zeitpunkt des Abschlusses seiner Arbeit an den Fragmenten als gesichert gelten konnte, fehlen den *Epicurea* nicht nur das *Gnomologium Vaticaneum* – die erst 1888, also ein Jahr nach Erscheinen der *Epicurea*, in einer vatikanischen Handschrift gefundene Gnomensammlung –, sondern auch die *Collectio tertia* der Herculaneischen Fragmentfunde. Obwohl Useners Ausgabe als Basis für jede Auseinandersetzung mit Epikurs Philosophie nicht wegzudenken ist, muss betont werden, dass sie unter editorischen Gesichtspunkten nicht unbedenklich ist: Die von ihm vorgenommene Anordnung der Zitate besitzt systematischen Charakter und wird daher nicht immer der Herkunft der Zitate und deren kontextueller Einbettung gerecht. Zudem ist Useners Systematik teils willkürlich angelegt und ergibt sich nicht zwangsläufig aus den Inhalten der Texte. Einen unentbehrlichen Beitrag für die Forschung leistete daher Arrighetti, indem er in seiner