Der Zahlbegriff und seine Logik

Die Entwicklung einer Begründung der Arithmetik bei Frege, Gödel und Lorenzen[1]

Vojtěch Kolman, Charles University Prague

The article deals with the evolution of the foundations of arithmetic: from the auspicious beginnings with Frege and Dedekind (logicist *thesis*) through the cataclysm of Russell's antinomy (intuitionist *antithesis*) to the late writings of Hilbert and the work of Paul Lorenzen (operativist and constructivist *synthesis*). The proposed historical and dialectic reconstruction does not consist in ad hoc attempts to overcome formal difficulties of the systems in question. It rather shows how Frege's and Dedekind's original intentions are to be understood and can partly be justified. For this, Gödel's famous results are of great importance.

Als Henri Poincaré in seinen populärwissenschaftlichen Schriften ironisch zu den logizistischen und mengentheoretischen Grundlagen der Mathematik erklärte: „sie sind nicht mehr steril, sie haben den Widerspruch herausgebracht" (Poincaré, 1906b, § 15), argumentierte er am Ende dahingehend, dass die vollständige Induktion, von welcher Logizisten und Mengentheoretikern selbst regelmäßig Gebrauch machen, ein echt mathematisches, bzw. synthetisch apriorisches Prinzip darstellt d.h. es lässt sich nicht ‚logisch' begründen. Siehe (Poincaré, 1906a, §§ 29–31). Auch wenn Poincaré recht haben sollte, seine Äußerungen verdecken mehr als sie erklären. Immerhin greifen sie, ähnlich wie die Bemerkungen des späten Wittgensteins (Wittgenstein, 1984b, 306 ff), den Kern der logizistischen Idee selbst an, d.h. sie sind nicht damit abzutun, dass man etwa mit Boolos und Wright zeigt, wie man die Antinomie des Logizismus technisch vermeiden könnte.

Der thematische Rahmen dieser Abhandlung ist die allmähliche Entwicklung der Idee, der Arithmetik eine Grundlage zu geben, von den erfolgversprechenden Anfängen bei Dedekind und Frege (mit ihren logizistischen *Thesen*) über das Kataklysma der Russellschen Antinomie (intuitionistische *Antithese*) bis hin zum Grundlagenprogramm in den Schriften des späteren Hilbert oder dann auch bei Paul Lorenzen (operative bzw. konstruktivistische *Synthese*). Eine solche historisch-dialektische Rekonstruktion besteht nicht in mehr oder weniger willkürlichen Versuchen, durch ad-hoc-Reparaturen die unterschiedlichen formalen Schwächen in den besonderen Systemen zu überwinden. Sie soll eher einen Weg zeigen, wie die ursprünglichen wissenschaftstheoretischen Intentionen Dedekinds und Freges zu begreifen und partiell auch zu rechtfertigen sind. Damit ist

[1] Dieser Artikel entstand mit Unterstützung eines Forschungsstipendiums der Alexander von Humboldt-Stiftung und im Rahmen des Forschungsprojekts MSM 0021620839 des Ministeriums für Bildung der Tschechischen Republik. Der Autor möchte Prof. Pirmin Stekeler-Weithofer für wertvolle Vorschläge und Korrekturen danken.

auch mein konkretes Ziel gegeben: Ich will die Idee der analytischen Arithmetik Freges und Dedekinds und ihre Kritik im Intuitionismus Brouwers und Poincarés bis in die Philosophie Wittgensteins und Paul Lorenzens hinein verfolgen, um dann u.a. zu zeigen, welche Rolle die vollständige Induktion und die mit ihr konventionell verbundene Begriffe einer arithmetischen Anschauung bzw. ‚Intuition' und Praxis in der Beurteilung des (epistemischen) Status der Arithmetik oder des Unterschiedes zwischen Arithmetik und Logik spielen. Die berühmten Resultate Gödels sind hierbei von großer Bedeutung.

1 Glanz und Elend des Logizismus

Betrachten wir den begründungstheoretischen Plan, welcher in der *logizistischen* Literatur – von Freges *Grundlagen der Arithmetik* (Frege, 1884), i.f. kurz *Grundlagen*, und Dedekinds *Was sind und was sollen die Zahlen* (Dedekind, 1888), bis zu den neologizistischen Schriften von Boolos und C. Wright, z.B. (Boolos, 1998) und (Wright, 1983) – faktisch besprochen wird, d.h. die Definition des Zahlenbereiches und der eventuelle Nachweis ihrer strukturellen Eindeutigkeit, dann fällt auf, dass die praktische Arithmetik weniger an einer (axiomatisch gegebenen) Struktur der Zahlen als an den arithmetischen Operationen zunächst des Addierens und Multiplizierens, dann auch an rekursiv definierten Potenzierungen, also an komplexen Zahlangaben mithilfe diverser Zahlbenennungen, und am praktischen Rechnen interessiert ist.

Im Logizimus wird von diesen Operationen ganz abgesehen. Das Operative als semiotische Grundlage der Arithmetik wird sozusagen vergessen und zwar zugunsten einer rein funktionalen und relationalen Semantik, welche die Gegenstände schon voraussetzt. Der Logizismus hält das Operative nur für etwas Unwesentliches, Zufälliges, etwas, wovon Frege spöttisch als Kleinkinderzahlenarithmetik spricht und was nach seiner Meinung keine theoretische Relevanz habe. Siehe (Frege, 1983, 296).

1.1 *Freges Kritik an Grassmanns Definition*

Wie Frege das Problem der Arithmetik angeht, lässt sich an einer äußerst dunklen Stelle aus seinen *Grundlagen* erläutern. Zu Beginn der *Grundlagen* bespricht Frege die Natur der elementaren arithmetischen Sätze wie „2+2=4" oder „2738984+9=2738993" und fragt, ob sie aus allgemeinen Gesetzen ableitbar sind. Kant, welcher diese Sätze als triviale Beispiele einer Kategorie der synthetisch apriorischen Aussagen anführte, meinte selbstverständlich, dass sie nicht (rein logisch) zu beweisen, sondern in einem konstruktiven (apriorischen) System synthetisch zu lernen sind. Denn ihre Wahrheit beruht auf Konstruktionen im operativen Umgang mit in der Anschauung kontrollierten Zahlfiguren. Nach Leibniz sind die elementaren Sätze dagegen direkte Konsequenzen analytischer Definitionen „1+1=2", „2+1=3", „3+1=4" usw. und seines Prinzips der Ersetzbarkeit des Gleichen durch das Gleiche (Substituierbarkeit *salva veritate*). Frege weist in diesem Zusammenhang darauf hin, dass Leibniz in seiner Ableitung von „2+2=4“

$$2+2=2+1+1(\mathrm{def})=3+1(\mathrm{def})=4$$

ein allgemeines Gesetz, nämlich die Assoziativität

$$2+(1+1)=(2+1)+1$$

benutzt, das nicht bloß zu erwähnen, sondern zu begründen sei. Das ist durchaus schon ein Einwand gegen den ‚Frühlogizismus' Leibnizscher Prägung, auch wenn dieser zunächst bloß das Programm war, die Arithmetik aus definitorischen Identitäten abzuleiten. Denn es ist jetzt nicht klar, ob die Assoziativität ein logisches oder ein spezifisch arithmetisches Gesetz ist. Frege diskutiert dazu auch den Versuch von H. Grassmann, die These der Analytizität der Arithmetik, also Leibniz zu retten, und zwar gegen Kants These, die arithmetischen Wahrheiten seien zwar nicht empirisch bzw. aposteriori, sondern apriori wahr, aber sie beruhten auf synthetische Weise auf einer spontan reproduzierbaren Anschauung, nämlich auf den schematischen Operationen des Zählens und Rechnens im Umgang mit Zahlfiguren. Grassmann möchte die Assoziativität durch seine berühmte rekursive Definition des Addierens wie folgt begründen:

(1) $a+0=a$,

(2) $a+(b+1)=(a+b)+1$.

Nach Frege – und hiermit kommen wir zu der dunklen Stelle in Freges Darlegung – stellen Grassmanns Gleichungen keine korrekte Definition dar, denn (i) um den Ausdruck „a+(b+1)“ zu verstehen, müsse ich schon den Ausdruck „a+b“ verstehen, und (ii) Grassmann zeige nicht, dass „a+b“ kein leeres Zeichen ist, d.h. dass es eine und nur eine Zahl gibt, welche von diesem Zeichen bezeichnet ist. Diese Stelle ist deswegen dunkel, weil es zwei Lesarten der Gleichungen gibt. Nach der einen fungieren die Buchstaben *a* und *b* als Eigenvariable in einem operativen System, für das die Gleichungen festlegen, wie man rechnen soll und darf.[2] Als solche taugen sie aber nicht zur Rechtfertigung des Logizismus, der als solcher nicht Operationen mit Figuren, sondern Funktionen auf Gegenstandsbereichen definieren möchte. Frege vertritt gerade diese zweite, funktionslogische, Lesart der Gleichungen, in denen die Buchstaben *a*, *b* Variable für Zahlen *qua* abstrakte Gegenstände, nicht, wie im Fall von Eigenvariablen, bloß Vertreter für Ausdrücke sind.

Freges erste Einwendung ist nun nicht schwer zu verstehen, wenn man zusätzlich noch die allgemeinen semantischen Prinzipien Freges kennt, in diesem Fall das so genannte Prinzip der Kompositionalität: Wenn ich den Ausdruck „a+(b+1)“ verstehen will, muss ich schon seine Bestandteile, d.h. Ausdrücke „a“, „b“ und „+“ verstehen, also auch den Ausdruck „a+b“, welcher durch die Gleichung (2) definiert werden sollte. Daher kann ich so die Addition nicht definieren. Denn ich muss, so scheint es, schon für alle *a* und *b* wissen, was „a+b“

[2] Zum Begriff der Eigenvariable vgl. 2.3 unten.

heißt. Das aber würde bedeuten, dass ich die Gleichungen „$a+(b+1)=(a+b)+1$" als wahr beweisen muss und eben daher nicht als Definition verwenden kann. Die Ausdrücke (1), (2) sind also keine expliziten Definitionen der Funktion +. Frege unterstellt aber, dass uns Grassman eine solche hat geben wollen. Er selbst kämpft dann mit demselben Problem nur einige Kapitel später.

Der Mangel an Verständnis dafür, dass andere Forscher möglicherweise seine eigenen Vorstellungen von einer zulässigen Definition für Funktionen, Relationen, Wertverläufen oder Mengen in Gegenstandsbereichen nicht teilen, sondern einen anderen, sich stärker an den Figuren und an der Festlegung von Operationen orientierenden Ansatz verfolgen, zeigt sich bei Frege im zweiten Teil Kritik noch klarer. Denn diese setzt das gesamte Programm des Logizismus selbst schon als Rahmen voraus. Es geht Frege dabei darum, die arithmetischen Gegenstände unter Einschluss der Wertverläufe und Mengen als spezielle Gegenstände aus einem *universe of discourse*, einem umfassenden Gebiet aller möglichen *logischen Gegenstände* durch ihre Eigenschaften zu bestimmen, also mit Hilfe einer Wahrheitswertfunktion oder Aussageform auszusondern. Dazu und auch zu diesem Kapitel vgl. (Kolman, 2005) und (Kolman, 2007).

1.2 *Der Logizismus Freges und der Logizismus Dedekinds*

Das zentrale Problem ist dabei der Begriff der Funktion. Denn dieser Begriff, welchen Frege so erfolgreich in seiner formalen Semantik anwendet, schwankte im Laufe des Aufschwunges der modernen Analysis zwischen zumindest drei zu unterscheidenden Betrachtungsweisen. Und er schwankt bis heute. (1) Auf der einen Seite steht die operative Vorstellung von einer Vorschrift, welche aus einer begrenzten Anzahl elementarer Operationen aufgebaut ist. (2) Auf der anderen steht die Idee Eulers von einer durch eine Formel (etwa ein Polynom) definierten Funktion, für die sogar solche Eigenschaften wie Stetigkeit, Differenzierbarkeit oder Integrierbarkeit unterstellt oder als erfüllt verlangt werden. (3) Auf der dritten Seite steht das ganz und gar liberale Konzept Dirichlets, welcher beliebige rechtseindeutige Korrespondenzen zwischen Objekten als Funktionen zulassen wollte. Während Dedekind zur liberalen Seite neigt, verallgemeinert Frege die Eulersche Position. Er will über Funktionen sprechen, ohne an die algorithmische Natur von Operationen gebunden zu bleiben, aber auch ohne bloß vage von Zuordnungen zu reden, die nicht als Funktionen über Gleichungen der Form $F(x)=y$ oder rechtseindeutige Relationen der Form $R(x,y)$ definiert sind.

Freges Programm, die Kantische Konstruktion der Zahlen über Zahlrepräsentanten $0, 0+1, 0+1+1$, usw., und über schematische Operationen im anschaulichen Umgang mit ihnen zu vermeiden, zielte eben auf eine begriffliche Aussonderung der Zahlen aus einem größeren Gebiet durch eine definitorische Formel $Z(x)$ ab. Dieses Programm hatte zwei Teile, und zwar die Beschreibung (i) der ausgliedernden Formel $Z(x)$ selbst und (ii) des Gegenstandsbereiches, aus welchem jene Formel die Zahlen ausgliedern kann. Als Formel $Z(x)$ benutzte Frege die berühmte Nachfolgerdefinition

$$(Zx) \quad (\forall X)\{X0 \wedge (\forall x)[X(x) \rightarrow X(x+1)] \rightarrow X(x)\}.$$

Die Gegenstände, auf denen diese Formel definiert sein sollte, sollten zumindest die durch Freges Grundgesetz V (vermeintlich) gegebenen Wertverläufe $\{x:Fx\}$ umfassen. In den *Grundgesetzen der Arithmetik* reduziert Frege den Gegenstandsbereich sogar auf den speziellen Bereich der reinen Wertverläufe. Diese sind seiner Ansicht nach offenbar *logische Gegenstände*, da sie in einem rein logischen Vokabular, zu dem wir allerdings auch den Operator $\{x:Fx\}$ der logischen (Mengen-)Abstraktion hinzurechnen müssen, benennbar sind: Die Null ist dann $\{y:y\neq y\}$, $n+1$ ist definiert als $\{y:y=0\vee\ldots\vee y=n\}$ für alle $n\geq 0$. „n" ist hier eigentlich eine verdeckte Metaeigenvariable. Statt n+/:1 können wir auch kurz und übersichtlicher s(n) schreiben.

Den ontologischen Problemen, welche diese Definition mit sich bringt, d.h. vor allem der Frage nach der Gegebenheit des ‚Stoffes' oder Bereichs, aus dem man die Zahlen ausgliedern kann, versucht Dedekind in (Dedekind, 1888) dadurch auszuweichen, dass er die Zahlen nicht aus irgendeinem *konkreten* Gegenstandsbereich (welchen man im voraus beschreiben müsste) aussondert, sondern aus *allen möglichen* Bereichen. D.h., eine Zahl zu sein, wird zu einer Art Meta-Eigenschaft oder einem Eigenschaftsschema, das in jedem beliebigen Gegenstandsbereich ggf. instantiiert werden kann. Das Prädikat Z(x) wird so zur geschlossenen Formel

(PI) $(\forall X)\{X0\wedge(\forall x)[X(x)\rightarrow X(s(x))]\rightarrow(\forall x)X(x)\}$,

welche zusammen mit zwei weiteren Forderungen an die Funktion s des direkten Nachfolgers und das erste Element 0

(P1) $(\forall x)(s(x)\neq 0)$ (dass die Null nicht im Wertebereich von s liegt),

(P2) $(\forall x)(s(x)=s(y)\rightarrow x=y)$ (dass s injektiv, d.h. linkseindeutig ist),

die so genannte *implizite Definition der natürlichen Zahlen* darstellt. Das Wort „implizit" weist darauf hin, dass man hier nicht einen konkreten Gegenstandsbereich definiert oder definieren kann, sondern nur eine Klasse solcher Gegenstandsbereiche, welche gewisse strukturelle Eigenschaften haben – nämlich diejenige, welche durch (PI), (P1–2) formuliert sind.

Es kann geschehen, dass alle durch bestimmte Formeln (Axiome) implizit definierten Bereiche strukturell identisch – isomorph – sind. Als eine Definition sind dann die Axiome wenigstens in diesem relativen Sinne (bis auf Isomorphie) eindeutig, was auch im Fall unserer drei Formeln, der so genannten (Axiome der) Peano-Arithmetik der zweiten Stufe (PA2), so ist. Diese Tatsache, die so genannte Kategorizität von PA2, haben sowohl Dedekind als auch Frege (wie unlängst Heck in (Heck, 1995) nachgewiesen hat) bewiesen.

Das an dem Beispiel der Zahlen geschilderte Verfahren wandten die Logizisten auch im Falle der arithmetischen Operationen an, d.h. auch sie sollten aus einem größeren Bereich aller Funktionen, welche auf dem Zahlenbereich existieren, gewonnen werden. Gleichungen wie die von Grassmann gegebene können diese ausgliedernde Aufgabe ganz gut erfüllen. Ohne zusätzliche Überlegungen kann man aber nicht sehen, ob sie wirklich eine konkrete Funktion eindeutig bestimmen. An ihrer Form lässt sich das nicht unmittelbar sehen. Wenn man daher Grassmanns Definition so liest, dann behält Frege mit seinem Einwand recht.

1.3 *Das Rekursionstheorem und die Idee der expliziten Definition*

Dass die rekursiven Gleichungen zu einer charakteristischen Beschreibung bzw. Kennzeichnung einer Funktion dienen können, haben Dedekind und später auch Frege wirklich bewiesen, und zwar gerade im Rahmen des Beweises der Kategorizität von PA2. Einen Bereich, welcher die Axiome von PA2 erfüllt, nennt man, Dedekind zufolge, ein *einfach unendliches* System. Seine Unendlichkeit ist Folge der Axiome (P1–2), welche die Existenz einer injektiven und zugleich nicht surjektiven Funktion postulieren. Die Einfachheit bedeutet, dass jedes Element als ein Nachfolger des ersten Elementes (0) in einer durch die zugehörige Funktion (s) bestimmten Reihe, also als „s(s(s(…s(0)…)“, darstellbar ist; sie ist durch (PI) erzwungen. Das so genannte *Rekursionstheorem* Dedekinds behauptet nun in einer seiner Versionen das Folgende:

Hat man zwei Systeme $\langle N_1,s_1,0_1\rangle$, $\langle N_2,s_2,0_2\rangle$, wobei das erste ein einfach unendliches System ist, dann existiert genau eine Funktion h: $N_1 \rightarrow N_2$, so dass gilt

(1) $h(0_1) = 0_2$

(2) $h(s_1(y)) = s_2(h(y))$.

Dies ist die einfachste Form der Rekursion: Man setzt den Wert für 0, und zeigt, wie er für s(x) festzusetzen ist, falls er schon für x festgesetzt wurde. Weil so die Anzahl der Elemente, welche man für die Festsetzung von h(x) braucht, in einem einfach unendlichen System immer endlich ist, weiß man, dass dieses Verfahren zu einem Ende kommen muss, und schließt daraus, dass es um eine korrekte Funktionsbeschreibung handelt. Den Standards Freges oder Dedekinds genügt aber diese Überlegung eben darum nicht, weil es ein algorithmisches (operatives) Argument ist, welches in ihren (gegenstands- und funktionsorientierten) Systemen keine theoretische Stütze hat. Schon s_2 muss bei ihnen nicht unbedingt eine algorithmische, mit einer Vorschrift verbundene Funktion sein! Von Freges Standpunkt aus *beschreibt* man hier einfach die Funktion h mit Hilfe ihrer früher beschriebenen Werte, also mit Hilfe dieser Funktion selbst, und begeht so einen Zirkelschluss.

Der logizistische Beweis geht dagegen folgendermaßen vor: Man nimmt das geordnete Paar $\langle 0_1,0_2\rangle$ und bildet den minimalen Abschluss H der Menge $\{\langle 0_1,0_2\rangle\}$ auf die Funktion $j(\langle x,y\rangle) = \langle s_1(x),s_2(y)\rangle$, welche auf dem kartesischen Produkt $N_1 \times N_2$ korrekt definiert ist. „Korrekt“ bedeutet anhand einer einzigen – expliziten – Formel T(u,v), von welcher man zuerst irgendwie (also nicht notwendigerweise ‚effektiv‘) zeigt, dass gilt:

$$(\forall u)(\exists! v)T(u,v),$$

dass es also zu jedem u genau ein v mit T(u,v) gibt, und erst dann setzt:

$$j(u) = v \leftrightarrow T(u,v).$$

Das ist im Falle von j möglich. Der Rest des Beweises besteht in dem Nachweis, dass H schon die erwünschte Funktion h ist, was man leicht mit Hilfe der Induktion zeigt.

Als Schlussregel:

$$0 \in M,\ x \in M \rightarrow s(x) \in M \Rightarrow M = N,$$

oder intensional:

$$X(0),\ X(x) \rightarrow X(s(x)), \Rightarrow (\forall x)X(x),$$

gilt diese Induktion für jedes einfach unendlichen System $\langle N,s,0 \rangle$ und jede Teilmenge M bzw. $\{x : X(x)\}$ von N, und zwar trivialerweise, aufgrund seiner Definition.

Hat man das Rekursionstheorem zur Verfügung, ist die Kategorizität von PA2 leicht zu beweisen. Man muss als das zweite System nur wieder ein einfach unendliches nehmen. Das Theorem sollte hauptsächlich zur Verteidigung der Definitionen vom Grassmannschen Typs dienen. Dazu eignet sich die folgende Verallgemeinerung freilich besser:

Ist auf einem einfach unendlichem System $\langle N,s,0 \rangle$ eine n-stellige Funktion f und eine n+2-stellige Funktion g gegeben, dann existiert auf diesem System genau eine n+1-stellige Funktion h mit n=0 Parametern $x=(x_1, \ldots, x_n)$, so dass gilt

(1) $h(x,0) = f(x)$,

(2) $h(x,s(y)) = g(x,y,h(x,y))$.

Die Grassmansche Addition erhalten wir jetzt leicht, wenn wir als f die Identität $f(x)=x$ und als g die Funktion des direkten Nachfolgers $g(x,y,z)=s(z)$ nehmen. Ähnlich gewinnen wir die Multiplikation, Potenzfunktion, kurz: alle so genannte rekursiven Funktionen.

Der Umstand, dass man zum Beweis des Theorems wieder nur die Definition des einfach unendlichen Systems (also seine Struktur) benutzten muss, zeigt anschaulich, warum die Logizisten die arithmetischen Operationen zu Gunsten der Zahlenstruktur vernachlässigen konnten: die Operationen sind nämlich in PA2 (im Unterschiede zu PA1, also zur Peano-Arithmetik der ersten Stufe!) explizit definierbar, die Addition z.B. durch die Formel

(Axyz) $x+y=z \leftrightarrow (\forall h)\{(\forall u,v)[h(u,0)=u \wedge h(u,s(v))=s(h(u,v))] \rightarrow h(x,y)=z\}$.

Hiermit erscheint Kants ‚Anschauung', aufgrund welcher wir die unendliche Reihe von Formeln $x+0=x$, $x+s(0)=s(x+0)$, $x+s(s(0))=s(x+s(0))$, … beherrschen lernen müssen, als überflüssig. Die unendliche Konstruktion und die zugrunde liegende Intuition sind durch eine endliche Formel ersetzt.

1.4 *Die Grenzen der logizistischen Definition*

Ist es nun nicht ein Triumph des Logizismus, zu zeigen, dass die Arithmetik diskursiv, analytisch, und nicht konstruktiv, synthetisch ist? Nein. Denn die versprochene Elimination des Unendlichen ist bloßer Schein. Woher wissen wir denn, dass Definitionen wie (Zx) oder (Axyz) die vortheoretischen Begriffe einer

Kleinkinderzahlenarithmetik richtig treffen? Die Antwort ist: weil diese Begriffe, d.h. die rekursiv angeeignete Zahlen 0, $0+1$, $0+1+1$ usw. und das analog erlernte Addieren als einer der Werte der in (Zx) bzw. (Axyz) benutzten Variable figurieren. Im ersten Falle ist die zu definierende Menge aller Zahlen schon ein zulässiger Wert von X. Dasselbe gilt für die Addition, welche einfach die rekursive Gleichungen (1), (2) und *nichts anderes* erfüllen muss. Man kann leicht zeigen, dass, wenn diese Mengen und Funktionen nicht im Bereich der 2.-stufigen Variable X bzw. h wären, die logizistische Definition versagte und auch andere Gegenstände und Funktionen als die ‚Zahlen' und ‚Addition' zuließe, wie es bei PA1 und ihren nonstandard-Modellen auch der Fall ist.

Man kann sich auf diese Situation sofort mehrere sinnvolle Reaktionen vorstellen. Zu denken ist an die Abkehr vom logizistischen Programm bis zu der Verteidigung der strittigen Definitionen im Kontext einer allgemeineren Untersuchung der mathematischen Strukturen. Die häufigste ‚Lösung' und zugleich das Zeichen einer totalen Ratlosigkeit ist die Einführung der so genannten arithmetischen Intuitionen, welche angeblich erst durch die logizistischen Definitionen ihre exakten Formen erhalten. Was sind aber diese Intuitionen? – Meint man damit die noch ungeordnete, unreflektierte Erfahrung im Sinne von Freges „Kleinkinderzahlen" oder die bei Wittgenstein breiter aufgefasste mathematische Praxis? – Wahrscheinlich nichts davon. Schon der gewählte, für Frege und Wittgenstein unakzeptierbare Titel „Intuition" zeigt, dass es sich um ein mystisches Element, ein Orakel, handelt, welches den individuellen Bedürfnissen gemäß benutzt wird.[3] Trotzdem ist ein Nachdenken über ‚intuitionistische' Lösungen nicht gänzlich wertlos: Die Folge ist, dass der Zusammenhang mit dem praktischen Rechnen genauer beobachtet wird. Man sieht dann auch gestufte Ebenen mathematischer Praxis: man könnte etwa mit einer Arithmetik von Strichlisten auf Kerbhölzern anfangen und den Gang bis in die modernen Theorien verfolgen.

Freges abschätzige Stellung zur ‚Arithmetik für Kinder' war in der Tat nicht gegen die Idee einer praktischen Begründung von Arithmetik gerichtet: Schon seine ‚künstliche' Definition der Zahl als einer Menge aller gleichzahligen Mengen hat er erst nach einer weitläufigen Analyse des Gebrauches von Zahlwörter im Satzkontext aufgestellt. Das Ziel seiner Kritik waren eigentlich naturalistische Theorien. Es galt, die Arithmetik auf reine Deskriptionen unseres Operierens mit Artefakten (Mill) und unserer mentalen Zustände und Akte (Husserl) aufzubauen. Keiner von diesen Wegen, noch ihre Kombination, bringt uns aber bei der Rekonstruktion der Arithmetik weiter. Das liegt zweifellos an ihrer nichtempirischen, normativ apriorischen Natur. Denn einerseits ist die Arithmetik durch einzelne empirische Beobachtungen nicht widerlegbar. (Zwar sind 1 Tropfen Wasser und 1 Tropfen Wasser wieder 1 Tropfen Wasser, aber $1+1$ bleibt 2.) Andererseits ist die Arithmetik kein System beliebiger Konventionen, sondern hat gerade über die Anschauung und die spontane Produktion von Zählzeichen ein spezifisches Verhältnis zur Welt. Den normativen Aspekt der mathematischen Wahrheiten hat Frege nun leider in die Richtung einer prästabilierten Harmonie zwischen Sätzen

[3] Wittgenstein spricht charakteristischerweise von der Intuition als einer „nutzlosen Ausrede". Siehe (Wittgenstein, 1953, § 213).

und ihren Inhalten übertrieben. Eben damit aber hat er seinen Theorien einen platonistischen Beigeschmack gegeben.

2 Versuch einer praktischen Begründung der Arithmetik

Nach der Entdeckung von Russells Paradox steht die Philosophie der Mathematik vor der Aufgabe, eine begriffliche Analyse der Gegenstände und Aussagen der Arithmetik zu liefern, welche von einer intersubjektiven Erfahrung des Umganges mit sprachlichen und logischen Formen ausgeht, ohne zu vergessen, dass die ‚erfahrene Welt' und der ‚Erfolg in ihr' ebenfalls schon theoretische Konstrukte sind, an deren gerade die Mathematik einen beträchtlichen Anteil hat. Die Frage, wie ein Anfang der Analyse zu finden ist, führt in die Philosophie des späten Wittgensteins.

2.1 *Explizite und implizite Regel*

Ein großer Teil unseres Alltagslebens hat einen rein schematischen Charakter: Treten wir vom Haus auf die Straße, schauen wir nach links und nach rechts. Im Reden benutzen wir, ohne zu denken, die richtigen grammatischen Formen; beim Rechnen addieren und multiplizieren wir auswendig, d.h. wir reproduzieren eingeprägte Algorithmen usw. Diese Schemata sind nicht immer leicht zu explizieren. Andererseits ist eine gewisse Explikation im Prinzip immer möglich und häufig auch hilfreich, wie der Grammatikunterricht in einer Fremdsprache paradigmatisch zeigt.

Viele regelmäßig benutzte Schemata werden am Anfang sogar in expliziter Lehre erworben. Erst im Laufe des Gebrauchs werden sie ‚mechanisiert'. Das erlaubt uns, uns auf andere Schemata zu konzentrieren. Wittgenstein hat nun darauf hingewiesen, dass nicht alle Regeln explizit angeeignet werden können. Denn die Fähigkeit, Regeln zu folgen, unterstellt selbst schon gewisse Regelmäßigkeiten: Die Straße nur dann zu überqueren, wenn die Ampel auf Grün und nicht auf Rot steht, kann einem Kind direkt (unterstützt durch Sanktionen und Sanktionsdrohungen) erklärt werden. In allen Fällen muss man aber schon die Regel von folgendem Typ beherrschen: „Wenn mir jemand das und das in solcher Situation sagt (oder etwa eine Ohrfeige androht), soll ich das und das machen."

Es ist gerade das Netz der ‚unbewusst' angewandten und nicht immer durchsichtigen Regeln, das manche als die Intuition oder den sechsten Sinn bezeichnen. Aus praktischen Gründen wäre es selbstverständlich ganz dumm, auf diese Erfahrungsart zu verzichten. Andererseits ist es falsch, darauf zu verzichten, ‚Intuitionen' explizit zu reformulieren. Denn damit macht man sie gemeinsam kontrollierbar, auch wenn man weiß, dass diese Explikation aufgrund der oben erwähnten (relativ) notwendigen Implizität einiger Regeln immer nur partiell sein kann. Die prinzipielle Möglichkeit einer sprachlichen Explikation von Regeln ist schon damit gegeben, dass – wie gerade Wittgenstein zeigte – es sich nicht um private Regeln handeln kann: bei solchen wäre es nämlich unmöglich, zwischen einem richtigen und einem falschen Befolgen zu unterscheiden. Sie wären also gar keine Regeln, wie eine private Sprache keine Sprache wäre. Siehe (Wittgenstein, 1853, § 202). Um solche systematischen Explikationen kann man sich selbstverständlich auch im Fall der elementaren Arithmetik bemühen.

Im Anschluss an Hilbert hat nun Paul Lorenzen den operativen bzw. algorithmischen Zug der Arithmetik in ihrer veschiedenen Symbolisierungen hervorgehoben: die Arithmetik ist eine Lehre von dem Operieren nach gewisser Kalkülen. Siehe (Lorenzen, 1955, 3 f). Wenn diese Kalküle explizit formuliert wurden, kann man sie zu einer praktischen Begründung von Axiomen benutzen. Diese machen ein implizites – in Lorenzens Terminologie: empraktisches – Operieren nach diesen Regeln explizit. Um den praktischen Konstruktivismus Lorenzens von formalistischen (Hilbert) und mentalistischen (Brouwer) Varianten zu unterscheiden, nenne ich ihn „Operativismus".

2.2 *Interne Operation bei Wittgenstein*

Der Ansatz zur Unterscheidung der explizit und implizit angeeigneten Regeln ist schon in Wittgensteins *Tractatus logico-philosophicus*, i.f. kurz *Tractatus*, durchgeführt. Es geht dabei um seine berühmte Differenz „(explizit) *sagen* vs. (implizit) *zeigen*", aber auch um den weniger bekannten Unterschied zwischen der *externen* und *internen* Eigenschaften. Von spezieller Bedeutung ist für uns Wittgensteins Begriff der *internen Beziehung* oder *Operation*. Sie ist der Schlüssel zu Problemen, an denen der Logizismus Russells und Freges gescheitert ist.

Ein formaler Begriff und eine formale Beziehung sind von einer Art, dass alles aus dem zugehörigen Anwendungsgebiet notwendig unter sie fallen *muss*. Beispiele sind: „x ist Gegenstand", „x ist Begriff", „x existiert". Siehe Freges Debatte mit Kerry in (Frege, 1990, 167 ff), und seinen Dialog mit Pünjer in (Frege, 1983, S. 60 ff). Wittgenstein fügt gewissermaßen neue Beispiele hinzu: „x ist Zahl" und „x ist Nachfolger von y". Siehe (Wittgenstein, 1922, § 4.172–4.1273).

Ausgangspunkt ist Wittgensteins Einsicht, dass es eine andere ‚operative' Art der Definition für Zahlen gibt. Die nichttriviale Antwort, wie dies zu verstehen ist, liefert im *Tractatus* der Begriff der *internen Operation.* Sie wird als ein Verfahren beschrieben, in welchem man von einem Glied des internen Begriffes zu einem anderen Glied desselben fortschreitet, womit einerseits die Struktur jenes Begriffes und andererseits (indirekt) auch den Begriff selbst zu erfassen ist. Wenn wir von der Einzelheiten dieser Erläuterung (die allzu bombastisch als ‚Theorie' angesehen wird) absehen, ist klar, dass hier Wittgenstein seine spätere Überlegungen zum Thema Regelfolgens vorwegnimmt, wie es gerade der Zahlbegriff, an welchem der Begriff der internen Operation modelliert ist, zeigt. Wittgenstein zufolge ist der interne Begriff der Zahl als eine komplexe Variable darzustellen, welche aus irgendeinem Ausgangsglied a und einer Operation O, die aus dem beliebigen Glied x ein unmittelbar nachfolgendes O(x) erzeugt, besteht. Wittgenstein symbolisiert dies durch den Ausdruck [a, x, O(x)] bzw. im konkreten Fall [0, x, x + 1]. Das x ist hier die Eigenvariable der Operation. Den Zahlbegriff zu erfassen heißt also: sich die entsprechende generative Regel, die Regel der Zahlensymbolkonstruktion anzueignen.

Ganz unabhängig von der ursprünglichen Absichten bestärkt uns jetzt der *Tractatus* darin, dass die induktive Beschreibungen wie [a,x,Ox] in die elementaren Mittel der reformierten Arithmetik einzuordnen sind. Zu den definitorischen Mitteln Freges, welche durch die Idee einer expliziten Aussonderung bestimmt sind, kommt jetzt doch wieder die Einsicht Kants hinzu, dass die Konstruktionsregel zu beachten sind, welche den Variablen erst eine ontologische Basis liefern.

2.3 *Arithmetik als Regelfolgen*

Als prototypische Regel dient Lorenzen Wittgensteins Definition der Zahl, bestehend aus der Anfangsregel

(Z1) $\Rightarrow |$,

welche das Symbol | herstellt, und aus der nichttrivialen Regel

(Z2) $x \Rightarrow x|$,

welche besagt, dass für jedes (komplexen) Symbol x, das schon hergestellt ist, auch das Symbol x| herzustellen ist. Die nach den Regeln des gewissen Kalküls hergestellten Symbole nennen wir die ableitbaren Worte dieses Kalküls.

Spezifisch für den Kalkül (Z1–2), kürzer (Z), ist der Umstand, dass sich die Variable *x* nur auf die Symbole bezieht, welche in diesem Kalkül *selbst* schon hergestellt sind. Lorenzen nennt sie darum die *Eigenvariable.* In solchen Kalküle werden die Ausdrücke definiert.

Betrachten wir jetzt die Worte des Kalküls (Z) als die „Zahlnamen“, dann können wir Sätze wie

||| ist eine Zahl

bilden und dadurch begründen, dass uns eine Verteidigung in der Form einer Ableitung

|, ||, |||

des Zahlennamens nach den Regeln von (Z) zur Verfügung steht. Um dagegen einen Begriff

x ist eine Zahl

nach *Fregeschen* Standards zu erfassen, muss man nicht nur entscheiden, ob etwas eine Zahl ist, sondern auch, ob etwas keine Zahl ist. Die oben vorgeschlagene Definition scheint dazu nicht auszureichen: wenn etwas eine Zahl ist, können wir die entsprechende Konstruktion vorführen. Was sollen wir aber im Falle zeigen, wo etwas keine Zahl ist?

Dieses Problem ist sehr ernst zu nehmen. Sein rechtes Verständnis ist nämlich der Schlüssel zur konstruktivistischen Logik und Mathematik. Denn dass etwas, z.B. das Wort ||◊, in (Z) nicht ableitbar ist, ‚beweist‘ man durch folgende Überlegung: Ist ||◊ ableitbar, muss es entweder durch die Regel (Z1) entstehen, also die Form der Regelkonklusion haben, was evident nicht der Fall ist, oder aus einer solchen Regelkonklusion durch die Anwendung der Regel (Z2) hergestellt werden. Das kann aber auch nicht geschehen, weil die Konklusion von (Z2) durch keine Ersetzung der Variable x in || ◊ übergehen kann.

Von den wesentlich komplizierteren Varianten dieser Überlegung für wesentlich kompliziertere Varianten dieses Kalküls hat sich nun Hilbert eine nicht-semantische Methode des Beweisens der Widerspruchslosigkeit – nämlich den Beweis einer Unableitbarkeit eines ‚widerspruchsvollen' Wortes (Ausdrucks oder Satzes) – versprochen. Dieser Beweis ist auch das Thema einer bedeutenden logisch-mathematischen Disziplin, *der Beweistheorie*.

Der Vergleich der logizistischen und konstruktiven Definition der Zahl zeigt zunächst, dass beide induktiv vorgehen. In der Formel $(\forall X)\{X0 \wedge (\forall x)[Xx \rightarrow X(x+1)] \rightarrow Xx\}$ ist diese Induktion, also der Anfangschritt (Z1) und der induktive Schritt (Z2), *implizit*. Das wird dadurch ausgeglichen, dass man *explizit* sagt, dass die durch die Induktionsschritte (Z1), (Z2) konstruktiv definierte Menge ‚die kleinste' mit der angegebenen Eigenschaft ist. Im Falle der konstruktiven Definition wird diese letzte Bedingung dagegen vorausgesetzt. Der Unterschied der entsprechenden mathematischen und logischen Systeme besteht also ‚nur' in dem, was jeweils explizit zu *sagen* und was implizit zu *zeigen* ist. Dieser Unterschied ist aber zentral. Denn weil der Logizismus den konstruktiven Aspekt seiner – mit Recht so genannten – impliziten Definition unterdrückt, macht er sie zu einer bloßen Beschreibung einer schon als gegeben unterstellten Welt mathematischer Dinge. Und eben damit bleibt sogar noch der Axiomatiker Platonist.

Die operative Begründung der weiteren elementaren Begriffe ist relativ leicht. Der Additionsfall ist praktisch mit den rekursiven Gleichungen

(1) $x+0=x$

(2) $x+(y+1)=(x+y)+1$,

identisch. Man muss nur berücksichtigen, dass es sich jetzt um eine Funktion auf schon definierten Zahlen handelt, dass also die Variablen auf die Wörter des Kalküls (Z) zu beziehen sind. Damit erhalten wir den Kalkül (+):

(+1) $\Rightarrow x+| = x|$

(+2) $x+y=z \Rightarrow x+y|=z|$.

In Verbindung mit dem Zeichen „=" wird es nun aber höchste Zeit genauer zu erklären, wie der traditionelle Unterschied zwischen einer Zahl und einem Zahlnahmen (Zahlwort), welcher für die Zahl steht, zu verstehen ist. Eine Gleichsetzung von Zahl und Zahlwort hätte z.B. schon in dem Satze ||+|=||| keinen guten Sinn. Nach Frege ist nun gerade die Festsetzung der Gleichheit ein (notwendiger) Weg, wie die *Bedeutung* der logischen Eigennamen zu bestimmen ist. Es ist also besser den Kalkül (+) erstmal beiseite zu lassen und wieder mit (Z) anzufangen.

Deuten wir die Zeichenfolge || als ein empirisches Objekt, so hat eigentlich nicht nur die Gleichung ||+|=|||, sondern auch ||=|| keinen Sinn. Dass uns diese Art der Verschiedenheit zweier Zeichen (in der Farbe, Lage, Größe usw.) davon nicht abbringt, diese Zeichen unter Umständen als gleich (qua Zahlen) zu bezeichnen, folgt nun daraus, dass wir nicht ihre empirischen, sondern nur ihre operativen Eigenschaften in Betracht ziehen. In der veralteten, weil psychologischen Abstraktionstheorie sagte man, dass wir uns nur auf die operativen Eigenschaften konzentrieren. Wir halten also zwei Zeichen dann und nur dann für *gleich*, wenn sie durch *gleiche* Konstruktion hergestellt sind. Diese Entscheidung können wir nun selbst wieder in der Form eines speziellen Kalküls (=) artikulieren

(=1) $\Rightarrow | = |$

(=2) $x = y \Rightarrow x| = y|$.[4]

2.4 *Dialogische Erweiterung des operativen Ansatzes*

Aufgrund einer schlichten Untersuchung der Ableitbarkeit in Kalkülen (Z), (=) sind jetzt auch die nichtelementaren Sätze, z.B. die Behauptung

(S) $x| = y| \to x = y$

pragmatisch zu begründen. Dazu muss man aber neben den arithmetischen Kalkülen auch die Gebrauchregeln für die logischen Konstanten wie $\to$ oder $\neg$ aufstellen. Lorenzens operative (Regel-)Logik, welche von ihm später in eine dialogische (Spiel-)Logik entwickelt wurde, versucht solche pragmatische Logik-Begründung systematisch weiterzuentwickeln. Siehe z.B. (Lorenzen/Lorenz, 1978) und (Lorenzen, 1987). Der problematische Fall einer Verneinung (also Verteidigung einer Unableitbarkeit) ist z.B. folgendermaßen zu behandeln: Wer einen

[4] Die vorgeführte konstruktive Deutung der Gleichheit geht überraschenderweise auch auf Frege's *Grundlagen* zurück: Frege nimmt die Gleichheit nicht als eine elementare Beziehung an, aber definiert sie mittels des so genannten Leibnizschen Prinzips als

(LP) $x = y \leftrightarrow$ für jede Aussage A: $A(x) \leftrightarrow A(y)$.

Die eventuellen neuen Terme und die neu (re)konstruierten Satzkontexte, so sagt Frege in (Frege, 1884, § 65), müssen immer auf die Zulässigkeit dieses Prinzips überprüft werden. LP wirkt also normativ: es entscheidet mit, welche Terme für gleich zu halten sind (wenn sie salva veritate substituierbar sind) und welche nicht. Diese konstruktive Rolle von LP ist am Beispiel der Numeralia leicht zu erklären: Objekte wie „|", „|" oder weniger trivial „||", „2" sind *per se* (von einem absoluten Standpunkt aus betrachtet) sicher verschieden, man sollte also zuerst eher von einer Äquivalenz $\sim$ als von einer Gleichheit sprechen. Zu den so genannten Zahlen, oder allgemein zu neuen, abstrakt(er)en Gegenständen kann man später so übergehen, dass man nur solche Prädikate oder Aussageformen für zulässig erklärt, für welche gilt

(I) wenn $x \sim y$, dann $A(x) \to A(y)$,

oder äquivalent dazu, dass man alle Prädikate, welche zu $\sim$ nicht invariant sind, d.h. welche (I) nicht erfüllen, wie in unserem arithmetischen Falle „x ist grün", „x ist groß" usw., als kategorisch unangemessen ausschließt. In dem so angepassten Kontext kann nun die Äquivalenz durch eine Gleichheit ersetzt werden, weil man beweisen kann, dass LP gilt. (Die Richtung $\to$ ist trivial, die Umkehrung $\leftarrow$ folgt daraus, dass die Aussage „$x \sim y$" selbst invariant zu $\sim$ ist.) Machen wir jetzt von einem Gleichheitszeichen einen direkten Gebrauch, wie im Falle von (=) oder (+), geben wir so explizit kund, von welchen Aussageformen wir künftig abstrahieren wollen. Die Ausdrücke in beider Seiten von „=" sind dann automatisch als die Eigennamen auszuwerten. Vgl. hierzu insbesondere (Lorenzen, 1962b).

Satz behauptet, verpflichtet sich damit, ihn gegen einen eventuellen Opponenten zu verteidigen, was in unserem arithmetischen Falle bedeutet, eine Ableitung in (=) vorzuführen. Die Herausforderung des Opponenten ist dabei aber schon auch mit einer Verpflichtung verbunden: Einen Satz zu bestreiten ist in der Regel der Behauptung seiner Negation gleich. Die dialogische Regel für den komplexen Satz A kann man demzufolge so formulieren: Hat der Proponent einen Satz der Form $\neg A$ behauptet, darf ihn der Opponent dadurch bestreiten, dass er selbst A behauptet. Auf die Verneinung des elementaren arithmetischen Satzes $|||=||$ angewandt, bedeutet diese Regelung, dass sich eine Aufforderung, den Satz $||| \neq ||$ zu verteidigen, auf die Behauptung des Satzes $|||=||$ selbst reduziert. Um zu gewinnen, muss also der Opponent eine konkrete Ableitung vorführen. Wenn es ihm nicht gelingt, ‚gewinnt' der Proponent seinen Satz. Wichtig ist nun: Der Dialog hat ersichtlich immer ein Ende. Man sagt dazu auch, dass beide Sätze *dialogdefinit* sind. Noch wesentlicher ist, dass dem Opponenten eine Verteidigung jenes Satzes bei geeigneter Schritten des Proponenten gar nicht gelingen kann, also: dass sich der Satz gegen jeden Gesprächspartner vertreten lässt. Nur in diesem Falle, d.h. wenn der Proponent über eine allgemeine Gewinnstrategie verfügt, hat es einen Sinn, den verteidigten Satz „wahr" oder „begründet" zu nennen.

Bei weiteren Dialogregeln beschränken wir uns auf die Erörterung konkreter Beispiele. Wir fangen an mit dem Satz (S) oder seiner quantifizierten Variante

(L1) $(\forall x)(x| = y| \rightarrow x = y)$.

Um diesen Satz zu gewinnen, muss der Proponent auf beliebige Nachfrage des Opponenten, welche in der Wahl der substituierbaren Namen – Numeralien – m, n besteht, den Satz $m| = n| \rightarrow m = n$ vertreten. Er kann das entweder direkt machen, also den bedingten Satz $m = n$ ableiten, oder abwarten, bis sein Opponent die Bedingung $m| = n|$ verteidigt hat. Diese zweite Möglichkeit führt aber sogleich zu einer Gewinnstrategie für (L1): Den (relativen) Erfolg des Opponenten, d.h. Ableitung von $m| = n|$ in (=), kann der Proponent in einen (definitiven) Erfolg verwandeln, indem er die letzte Zeile wegnimmt, also die Ableitung von $m = n$ zeigt. Und umgekehrt, wenn der Opponent nicht erfolgreich ist, gewinnt der Proponent *per definitionem.* Somit ist (L1) – also eines der Axiome Peanos – pragmatisch begründet. Die Verteidigung des zweiten Axioms

(L2) $(\forall x)(| \neq x|)$

ist ganz ähnlich zu führen. Wir können also direkt zu dem Induktionsprinzip

(LI) $A(|) \wedge (\forall x)(A(x) \rightarrow A(x|)) \rightarrow (\forall x)A(x)$

übergehen.

Weiß man, dass die Regel für den Satz der Form $A \wedge B$ darin besteht, dass der Opponent einen der Sätze A, B wählt und den Proponenten dazu auffordert, diesen zu vertreten, ist die Gewinnstrategie in der Form einer Dialogentwicklung leicht beschreibbar. Der Opponent behauptet das Antezedens, der Proponent die Konsequenz:

	(O)	(P)
(1)	A(|),	$(\forall x)A(x)$
(2)	$(\forall x)(A(x) \rightarrow A(x\,|))$	

Im nächsten Schritt wählt der Opponent ein Numerale m und fordert so den Proponenten auf, den Satz A(m) zu behaupten. Ist z.B. m = |||, sieht der Dialog – mit seitwärts notierten Angriffen? – folgendermaßen aus:

(3)		A(|||)	(1) |||?
(4)	$A(|) \rightarrow A(||)$		(2) |?
(5)	A(||)	A(|)	(4)?
(6)	$A(||) \rightarrow A(|||)$		(1) ||?
(7)	A(|||)	A(||)	(6)?

Dieses Verteidigungsschema ist vollkommen allgemein. D.h. die Wahl des Numerales m beeinflusst nur die Länge, nicht das Ergebnis des Dialogs: Durch wiederholte Anwendung der Schritte (4), (5) kann der Proponent immer, d.h. für beliebige m, den Dialog in den Stand bringen, wo der Opponent den Satz A(m), welchen er früher bestreitet hat, verteidigen muss. Damit sind die Axiome Peanos vollständig begründet. Sie sind also nicht einfach ‚gesetzt', sie ‚definieren' auch die Zahlen nicht implizit, sondern sind für Zahlen als ‚wahr' (verfechtbar) bewiesen.

Die Regelungen derartige Dialoge für logisch zusammengesetzte Aussagen sind allerdings nicht ganz so natürlich und eindeutig, wie man zuerst vermuten konnte: Es ist vor allem zu entscheiden, nicht nur *wie*, sondern auch *wann* die beiden Dialogpartner die bisher gesetzte Thesen oder Aufforderungen angreifen bzw. beantworten können. Das hat tatsächlich Einfluss auf das Resultat. Insbesondere für Sätze, welche verteidigbar sind unabhängig davon, ob der Proponent ihre elementaren Satzkonstituenten verteidigen kann, erhalten wir alternative Gewinnstrategien für die so genannte *logische* Wahrheit und können entsprechend zwischen einer klassischen, einer konstruktiven, und eventuell auch weiteren Logiken unterscheiden. Siehe z.B. (Lorenzen/Lorenz, 1978). Vgl. dazu auch die Kritik in (Stekeler, 1986, 395 ff) und (Kambartel/Stekeler, 2005, 220 f). Momentan sind wir aber an der *arithmetischen* Wahrheit interessiert.

3 Die Philosophie der Arithmetik nach Gödel

Der Unterschied zwischen der arithmetischen und der logischen Wahrheit ist in Lorenzens operativ-dialogischem System zuerst ganz konventionell durch die Hinzunahme der arithmetischen Kalküle (Z), (=), (+) bzw. (×) definiert: Zu einer erfolgreichen Verteidigung der vollständigen Induktion (LI) muss man außer den logischen Regeln (→), (∀) und (∧) auch nach dem Kalkül (Z) operieren können. Das reicht aber noch nicht aus, die Logik als eine analytische oder diskursive Disziplin und die Arithmetik als eine synthetische oder konstruktive zu begründen.

Ganz im Gegenteil. Beide scheinen in dieser Normierung in einer engen Verbindung mit dem Symbolischem zu stehen und können demzufolge *formale* Wissenschaften heißen.

Doch gibt es eine wichtige Differenz. Man kann nämlich versuchen, nicht nur die arithmetischen und logischen Begriffe, sondern auch die zugehörige Wahrheit zu kalkülisieren, also alle wahren Sätze nach einem schematischen – d.h. maschinellen – Verfahren herzustellen. Das haben wir übrigens für den ganz elementaren Fall im Kalkül (+) schon gemacht. Dass es wirklich eine vollständige Schematisierung der klassischen Logik *erster Stufe* (!) im Blick auf die formal gültigen Satzformen gibt, wissen wir schon aus dem Vollständigkeitssatz Gödels. Was die Arithmetik betrifft, ist aber Gödels Unvollständigkeitssatz zufolge eine ‚vollformale', d.h. rein schematische Herleitung aller und nur wahren Sätze ausgeschlossen. Was das genauer bedeute, wird weiter unten thematisiert.

3.1 *Synthetisch und analytisch, vollständig und unvollständig*

Wenn wir eine Aussage bzw. einen Aussagenbereich „analytisch" nennen, sofern die Kontrolle der Geltung rein schematisch vorgenommen werden kann, dann scheint die Arithmetik nach Gödel eindeutig „nicht analytisch" zu sein. Denn arithmetische Wahrheitsdefinitionen und Beweismethoden transzendieren derartige schematische Beweismethoden. Man kann auch, wie es Lorenzen tut, hinzufügen, dass die Methoden der operativen Arithmetik „synthetisch" seien, weil man bei ihrer Begründung eine Konstruktion (Synthesis) unbedingt braucht (vor allem den Kalkül (Z) und die potenziell unendliche Reihe |, ||, |||, usw.). Siehe (Lorenzen, 1984, 45). Doch im Kontext einer operativen Auffassung der Logik und Arithmetik wird der Unterschied zwischen dem Konstruktiven und dem Begrifflichen, wie ihn Kant treffen wollte, wieder verwischt zu werden.

Aus diesem Grunde ist noch unklar, warum man nicht auch die Arithmetik, sondern nur die Logik „analytisch" im Sinne von „begrifflich" oder „konventionell-tautologisch" nennen sollte. Denn von der Logik ist es ebenso möglich zu sagen, dass ihre Sätze nicht rein schematisch kontrollierbar sind: Trotz ihrer Vollständigkeit ist auch die Logik unentscheidbar.

Im Streit um den logischen und epistemischen Charakter der Arithmetik kommt es seit Gödel in der Tat weniger auf den relativ unklaren Unterschied zwischen begrifflich und konstruktiv als auf die relative Unabhängigkeit der arithmetischen Wahrheit von reinen Schemata der Satzgenerierung an. Dass die Unmöglichkeit einer (effektiven) Axiomatisierbarkeit aller wahren arithmetischen Sätze keine Überraschung bedeuten sollte, zeigen freilich schon die bekannten Beispiele der seit Jahrhunderten unbewiesenen mathematischen Probleme. Auf sie gehen ja die zwei traditionellen Konzeptionen der arithmetischen Wahrheit zurück, und zwar die platonistische (die Sätze gelten ganz unabhängig von uns, unserer Sprache und unserer Festsetzungen, sie sind wahr oder falsch, ob wir es wissen oder nicht) und die mentalistische (von einer Gültigkeit zu sprechen, ist nur sinnvoll, wenn man das im Satz Gesagte aktuell – durch eine mentale Konstruktion – bewiesen oder widerlegt hat; an sich selbst ist der Satz als bloßes Sprachkonstrukt weder wahr noch falsch). Aus dem Nachweis der Unhaltbarkeit beider Positionen kann man letztlich eine plausible Einsicht herauspräparieren: man muss dazu aber den tieferen Kern der Gödelschen Resultate aufdecken.

3.2 *Was ist arithmetische Regel?*

Gödels Sätze behandeln effektiv axiomatisierbare Theorien. Unter Effektivität meint man nicht die Endlichkeit in einem ‚finitistischen' Sinne: Die Theorien können unendlich viele Axiome wie PA1 oder unendlich viele Schlussregeln haben. Wesentlich ist, dass diese Axiome und/oder Schlussregeln (man kann leicht die Axiome als Schlussregeln interpretieren), und demzufolge auch die Ableitungen, mechanisch überprüfbar (wiedererkennbar) sind. Das impliziert, dass es sich um endliche Zeichenfolgen handeln muss.

In einem gewissen Sinn kann man aber auch unendliche Regeln ‚effektiv' handhaben. Die so genannte ω-Regel

$$(\omega) \quad A(|), A(||), A(|||), \text{usw.} \qquad \Rightarrow \qquad (\forall x)Ax$$

ist z. B. ganz übersichtlich, solange man nur das „usw." richtig versteht. Die üblicherweise Tarski zugeschriebene Idee einer ‚Semantik' arbeitet in der üblichen Deutung systematisch ebenfalls mit solchen Metaregeln, mit (ω) als einem Spezialfall von

$$(\forall) \quad A(N) \text{ für alle substituierbare } N \qquad \Rightarrow \qquad (\forall x)Ax.$$

Das ist ja Teil der allbekannten modelltheoretischen Wahrheitsdefinition. Zu beachten ist, dass es hier im Unterschiede zu (ω) um keine konkrete Wahrheit handelt, sondern nur um ein Wahrheitsschema: man sagt ja nicht, wie die elementaren Sätze zu bewerten sind.

Es ist nun sehr wichtig, auch die Definition des Typs ($\forall$) als ein Regelsystem (bzw. als ein Regelsystemschema) aufzufassen, welches im Ausgang von der elementaren Sätzen a, b, … alle aus ihnen zusammengesetzte Sätze mit genau einem der Wahrheitswerte bewerten will. Die konstruktive oder intuitionistische Logik bestreitet diese Möglichkeit, da man von der (aktuellen oder prinzipiellen) Nichtexistenz einer Strategie für A(x) nicht auf die Existenz einer aktuellen Strategie für irgendeine $\neg$A(N) schließen könne, oder spezieller, da sich aus der Existenz einzelner Strategien dafür, wie einzelne A(N) zu beweisen oder zu widerlegen sind, die aktuelle Gesamtstrategie für A(x) nicht notwendig ergebe: Es ist z. B. kein Problem zu zeigen, dass ein konkretes gerades M als Summe zwei Primzahlen darstellbar ist. Als eine allgemeine Behauptung bleibt aber die Goldbachsche Vermutung, dass jedes gerades M ($\neq$2) diese Eigenschaft hat, bisher unentschieden, also weder bewiesen noch widerlegt.

Bei einem unendlichen Übergang wie (ω) muss man eine Entscheidung treffen, ob man ihn als Anwendung einer ‚Regel' nur dann auffassen möchte, wenn man *weiß*, dass alle seine Prämissen wahr sind, also über irgendeine Strategie, wie A(N) für beliebiges N zu gewinnen, verfügt, oder ob auch die ganz liberale Deutung zulässig ist, welche diesen Übergang prinzipiell deutet. D. h. es ist ein ‚zulässiger' Übergang nur unter der Voraussetzung, dass allen Sätzen A(N) der Wahrheitswert das Wahre zugeordnet ist. Dann erhält die Conclusio den Wert ‚das Wahre', den Wert ‚das Falsche' sonst.

Diesen zweiten Standpunkt verteidigt nun Stekeler-Weithofer in (Stekeler-Weithofer, 1986, 320ff), und zwar damit, dass in dieser Weise einen korrekten, wenn auch nicht effektiven arithmetischen Wahrheitsbegriff definiert wird, welcher den äußerst wichtigen Unterschied zwischen einer (noch) unbekannten, doch prinzipiell erkennbaren Wahrheit artikulieren lässt, wie man ihn aus dem Alltagsleben kennt.[5] Man kann dann selbstverständlich fragen, ob mit einem solchen ‚mild platonistischen' Standpunkt (Stekeler spricht anderswo von einem „semantischen Platonismus") auch die Existenz ‚prinzipiell unerkennbarer' Wahrheiten kompatibel ist, oder ob sogar der Gödelsche Satz selbst solche ‚streng platonistischen' Möglichkeiten impliziert. Die erste Frage ist dann zu bejahen, wenn man das Wort „prinzipiell" entsprechend deutet. D.h. die die Doktrin des ontologischen Platonismus muss anders widerlegt werden. Auf die zweite Frage gehen wir im Folgenden ein.

3.3 *Was ist arithmetische Wahrheit?*

Obschon die liberale Deutung des Überganges (ω) ihre Vorteile hat – sie hilft uns z.B., sich eine bessere Vorstellung von dem so genannten Standardmodell der Arithmetik zu machen, welcher uns normalerweise nur ‚intuitiv' vorgelegt wird – muss man auch zugestehen, dass unter einer „Regel" oder „Schlussweise" üblicherweise etwas verstanden wird, was man befolgen *kann*, also: dass eine Regel, welcher man *de facto* nicht folgen kann, keine Regel ist. Allerdings will der semantische Platonismus gerade zwischen einem solchen Regelfolgen und einer Wahrheitswertbewertung unabhängig von der Regelbefolgunskontrolle unterscheiden.

Wenn man jetzt zu (ω) die Bedingung hinzufügt, dass die Prämisse effektiv kontrolliert wird, erhält man praktisch die oben erwähnte konstruktive Begründung des quantifizierten Satzes: er ist wahr (begründet), wenn man eine allgemeine Gewinnstrategie für alle Substituenten N hat. Der geschilderte Unterschied in der Interpretation der unendlichen Regel wie (ω) ist gerade der Unterschied zwischen der klassischen und konstruktiven (effektiven) Arithmetik. Was man konkret unter einer Gewinnstrategie versteht, bleibt dennoch großenteils unbestimmt; es gibt also stets einen Raum für eine effektive, doch liberale Semantik und eine streng effektive, finite oder auch ‚mechanische' Syntax oder Axiomatik. Diese Axio-

[5] Nach Stekeler sieht die Situation folgendermaßen aus: Man hat irgendeine Klasse E von Sätzen, welche eindeutig als wahr oder falsch bewertet sind (sie erfüllen das so genannte „Wahrheitsprinzip") und man verfügt überdies über die Klasse der substituierbaren Terme T, für welche das folgende „allgemeine Substitutionsprinzip" gilt: ist der Satz einer Form S(M) für M aus T in E enthalten, so auch jeder Satz S(M/N), welcher aus S(M) durch die Substitution von N aus T für M entsteht. Die elementaren Sätze der Arithmetik ($M+N=P$, $M\times N=P$, $M<N$, $M=N$) sind dabei ein besonders gutes Beispiel solches Satzsystems, weil ihre Wahrheit mechanisch entscheidbar ist. Der Definition gemäß gilt also für E die folgende Disjunktion: entweder sind alle Sätze der Form S(M/N) für beliebigen Term N aus T wahr, oder gibt es in T ein Term P, so dass S(M/P) falsch ist. Aufgrund dieser Beobachtung kann man jetzt im Rahmen einer Metainduktion alle quantifizierten Sätze über E von beliebiger Komplexität eindeutig bewerten, ohne also zu wissen, welchen der beiden Wahrheitswerte sie haben.

matiken oder die streng finiten Regelsysteme (d.h. mit endlichen Regeln) heißen auch Vollformalismen, jene mehr liberalen Systeme (d.h. mit unendlichen Regeln, gleichgültig ob in klassischen oder konstruktiven Deutungen) sind seit Schütte als *Halbformalismen* bekannt. Siehe (Schütte, 1960) und (Lorenzen, 1962a).

Der Unvollständigkeitssatz betrifft nur die Vollformalismen. Gödel hat nämlich eine universale Strategie vorgeführt, zu jeder vollformal (also ganz schematisch) beschriebener Menge von Strategien nur wahre arithmetische Sätze zu gewinnen, einen begründbaren Satz G so zu konstruieren, dass er durch diese Strategien nicht zu gewinnen ist. Diese Metastrategie beruht auf dem so genannten Diagonalverfahren. Sie unterstellt, dass die Ausgangsmenge streng genug ist, weil schwache Strategien trivial unvollständig sind.

Die Pointe unserer Darlegung besteht nun darin, dass *der unbeweisbare, doch wahre* Satz G des Gödelschen Beweises *unbeweisbar* im Vollformalismus, aber *beweisbar* (also begründbar oder wahr) im Halbformalismus ist: Es gibt eine konkrete Strategie, ihn zu begründen, aber auch, einen anderen unbeweisbaren, doch wahren Satz zu konstruieren, wenn der Vollformalismus *ad hoc* um den ursprünglich unableitbaren Satz erweitert wurde. Damit ist auch angegeben, wie das Konzept der *prinzipiellen Unbeweisbarkeit* zu verstehen ist, also: keineswegs platonistisch (im strengen oder milden Sinne), weil der Gödelschen Beweis gar das Feld *des konstruktiven Halbformalismus* nicht verlassen hatte. Wir können künftig auch die Ableitbarkeit in Voll- bzw. Halbformalismus symbolisch unterscheiden, und zwar mit bekannten $\vdash$ und $\vDash$. Insgesamt haben wir also die folgenden Thesen aufgestellt:

(1) Die prinzipielle Unvollständigkeit der Arithmetik betrifft nur den arithmetischen Vollformalismus. Dieser ist darum unvollständig, weil es in ihm immer wahre arithmetische Formeln gibt, die unableitbar sind.
(2) „Unvollständig" bedeutet also immer „unvollständig relativ zu einem Halbformalismus", in welchem erst definiert ist, welche Sätze der Arithmetik als wahr bewertet sind und welche nicht.
(3) Aus diesem Grunde kann der Halbformalismus selbst nicht unvollständig sein. Er kann aber unvollständig sein relativ zu einem anderen Halbformalismus, wie dies z.B. der konstruktive im Vergleich zum klassischen ist. In diesem konkreten Falle hat man aber nicht bewiesen, dass die Unvollständigkeit eine prinzipielle ist: man kann also stets mit Hilbert die Lösbarkeit jedes mathematischen Problems erwarten oder sie sogar als eine regulative (optimistische) Hypothese verkündigen („wir müssen wissen, wir werden wissen" (Hilbert, 1930, 963)).
(4) Auch wenn man aber die arithmetische Wahrheit klassisch, also nicht effektiv definiert, bleibt das Gödelsche Theorem und seine unbeweisbare, doch wahre Formel G konstruktiv wahr, also begründbar im konstruktiven Halbformalismus. Man muss hier also zwischen $\vDash_K$ und $\vDash_L$ (K für „klassisch", L für „Lorenzen") sorgfältig unterscheiden.

3.4 *Ist die Arithmetik konsistent?*

Ganz analog dem Gödelschen Theorem ist auch sein Korollar zu erledigen, welches unter dem Namen des zweiten Unvollständigkeitssatzes bekannt ist. Es geht um den bekannten Slogan, dass man die Widerspruchslosigkeit der Arithmetik in der Arithmetik selbst nicht beweisen kann. Man versteht unter ihm nämlich oft ein endgültiges Verdikt darüber, ob die Konsistenz der Arithmetik überhaupt beweisbar ist. Vorsichtigere Lektüre ergibt aber nur die folgende Formulierung: Es gibt eine Strategie, zu jeder Vollformalisierung S der Arithmetik (welche wieder streng genug ist) einen Satz A_S so zu konstruieren, dass gilt: (1) A_S ist nur dann begründbar ($\vDash$), wenn S konsistent ist, und (2) A_S ist unableitbar in S ($\vdash$) genau dann, wenn S konsistent ist.

Es ist klar, dass die Bedingung (2) allein nur eine Trivialität fordert: Man könnte für A_S einfach irgendeine Kontradiktion wählen. Fügt man die Bedingung (1) hinzu, dann sollte der unableitbare Satz auch wahr sein. Einen solchen Satz A_S, der (1) und (2) erfüllt, kennen wir aber schon aus dem ersten Theorem. Wozu soll also das Korollar dienen?

Um das zu begreifen, muss man die ganze Sache mit Hilberts Augen betrachten. Dann ist es nämlich nicht wichtig, dass die Formel von S auch wahre arithmetische Sätze sind. Wichtig ist, dass sie konsistent sind. Für Hilbert ist das schon eine *hinreichende* Forderung an eine Theorie. Es stellt sich erst jetzt in voller Schärfe heraus, wie recht Frege in seiner Polemik gegen Hilberts Ersetzung der Wahrheit durch Konsistenz hatte. Siehe (Frege, 1976, 60ff). Frege wollte die Konsistenz aus der Wahrheit und nicht umgekehrt erschließen: Sind wir an der Axiomatisierung der Arithmetik interessiert, müssen wir selbstverständlich solche Axiome zu wählen, welche wahr, also nicht nur untereinander konsistent sind. Ihre Wahrheit gilt dann als triviale Rechtfertigung ihrer Konsistenz, und nicht umgekehrt.

Steht uns die beweistheoretische Rede von Halb- und Vollformalismen zur Verfügung, können wir mit Rücksicht auf das zweite Theorem Gödels die Frage nach der arithmetischen Konsistenz so formulieren: Die etablierten arithmetischen Vollformalismen (wie die Arithmetik Peanos oder Robinsons) sind deshalb konsistent, weil ihre Axiome im arithmetischen Halbformalismus ableitbar sind. Das ist eigentlich das übliche Modellargument: Die formale Theorie ist konsistent, weil sie ein Modell hat. Die beweistheoretische Reformulierung dieser allbekannten Tatsache hat nun den Vorteil, dass uns die Relativität dieses Argumentes folgendes zeigt: Peanos Arithmetik muss konsistent sein, weil im umgekehrten Falle auch der Halbformalismus, also die Definition der arithmetischen Wahrheit, inkonsistent wäre. Dass die unendlichen Regeln des Halbformalismus nicht zu einem Widerspruch führen, muss man selbstverständlich auch zeigen. Das ist aber relativ trivial: (1) die elementaren Sätze ($m+n=p$, $m\times n=p$) sind aufgrund der arithmetischen Kalkülen eindeutig als wahr oder falsch bewertet, (2) die Tarskische Bewertung der komplexen Sätze ($\neg A$, $A\rightarrow B$, $(\forall x)Ax$) ist auch korrekt, obwohl wir noch darüber streiten können, ob sie jedem Satz genau einen der Werte (wie Stekelers semantischer Platonismus sagt) oder ob sie den arithmetischen Sätzen höchstens einen der Werte (wie Lorenzen und seine Nachfolger zu glauben scheinen) zuordnen.

Schluss

Das zweite Theorem Gödels scheint zumindest darauf hinzuweisen, dass man in einem arithmetischen Konsistenzbeweis unendliche Argumente nicht vermeiden kann. Auch die späteren Konsistenzbeweise Gentzens (Gentzen, 1936) bauen auf dieser Einsicht auf. Diese Unvermeidbarkeit ist schon mit der unendlichen Konstruktion |, ||, |||, …, mitgegeben. Man kann also (1) mit Kant von Anfang an daran zweifeln, dass die ‚wahren' Sätze der Arithmetik aus einer formalen Definition deduktiv ergeben sollen. Und man kann (2) mit Poincaré vermuten, dass diese Tatsache mit der vollständigen Induktion zusammenhängt.

Der letztgenannte Umstand darf aber keineswegs als ein unterscheidendes Merkmal der Arithmetik von der Logik bzw. einer anderen Wissenschaften benutzt sein. Die vollständige Induktion braucht man unbedingt als ein arithmetisches Beweismittel, da die Zahlen (die arithmetischen Operationen usw.) induktiv definiert sind. Aber auch die logischen Begriffe wie Formel, Theorem oder Beweis sind induktiv definiert, weswegen man auch in der Logik nicht ohne Induktion zurechtkommen kann. Das hat übrigens schon Wittgenstein in seinem *Tractatus* berücksichtigt, als er eine Zahl als Index einer satzbildenden Operation deutete.[6] Sollte man aber daraus erschließen, dass zwischen Logik und Mathematik kein wesentlicher Unterschied besteht?

Der spätere Wittgenstein antwortet auf die Frage sofort negativ: Arithmetik und Logik sind selbstverständlich verschieden. Die eine rechnet, die andere schließt. Die Frage nach der Vollständigkeit hat damit wenig zu tun. Man kann nämlich Peanos Induktionsaxiom

(PI) $(\forall X)\{X0 \wedge (\forall x)[X(x) \rightarrow X(s(x))] \rightarrow (\forall x)X(x)\}$

indefinit deuten. Die Variable X ist dann nicht, wie in PA1, auf die Ausdrücke einer bestimmten formalen Sprache zu beschränken. Der entsprechende Vollformalismus (PA2) bleibt zwar stets deduktiv unvollständig, man kann aber argumentieren, dass er semantisch vollständig ist, dass also seine Axiome den grundlegenden arithmetischen Halbformalismus (das operative Modell) so gut ‚beschreiben', dass man in jedem Halbformalismus, in welchem die strukturell invarianten ‚Übersetzungen' dieser Axiome begründbar sind, nach entsprechender Übersetzung dieselbe Theoreme begründen kann. Siehe (Lorenzen, 1955, § 22) und (Lorenzen 1962a, 60). Das aber bedeutet, dass man im Prinzip zur Begründung eines arithmetischen Satzes nicht mehr die elementaren arithmetischen Kalküle, sondern nur die Axiome PA2 braucht. Für einen wahren arithmetischen Satz A wird damit der Satz PA2 → A zu einer logischen Wahrheit! Wenn jetzt die entsprechende Logik vollständig wäre, müsste auch die Arithmetik vollständig sein, was nach dem Gödels Theorem prinzipiell unmöglich ist. Das ist in der Tat die Beweisskizze, dass jede Vollformalisierung der Logik zweiter Ordnung (mit indefiniten Variablen) unvollständig ist. Vgl. dazu z.B. (Shapiro, 1991).

---

[6] Dass man seinen Versuch nicht für eine erfolgreiche Begründung der Arithmetik halten kann, ist eine andere Sache, welche anderswo ausführlicher behandelt ist. Siehe dazu etwa (Potter, 2002).

Was ist also die Antwort auf die Frage nach dem epistemischen Status der Arithmetik? Wir wissen jetzt sicher, dass es eigentlich eine Frage ist, welche die Beziehung der Arithmetik zur Logik, also die Differenzen beider Disziplinen betrifft. Gibt es nun solche Unterschiede? Natürlich. Man darf sie aber nicht in den Bereichen suchen, welche vom Anfang an darauf aufbauen, dass im Rechnen und Schließen auch Ähnlichkeiten zu finden und zu untersuchen sind. – Poincaré hatte also eigentlich Recht. Die moderne Logik war nur darum so erfolgreich, weil sie längst schon die mathematischen Methoden, z.B. die vollständige Induktion ausgenutzt hatte. Man muss aber noch hinzufügen, dass es zum Nutzen beider war, dass davon also beide Disziplinen profitiert haben. Sollten wir sie deswegen beide synthetisch oder analytisch nennen?

Referenzen

Boolos, G. 1998. *Logic, Logic, and Logic.* Cambridge MA: Harvard UP.

Coffa, A. 1991. *The Semantic Tradition from Kant to Carnap.* Cambridge: Cambridge UP.

Dedekind, R. 1888. *Was sind und was sollen die Zahlen?* Braunschweig: Vieweg.

Frege, G. 1884. *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*. Breslau: Köbner.

Frege, G. 1893/1903. *Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet*, Bd. 1/2. Jena: Hermann Pohle.

Frege, G. 1976. *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, Gabriel/Hermes/Kambartel/Thiel/Veraart (eds.). Hamburg: Meiner.

Frege, G. 1983. *Nachgelassene Schriften*, Hermes/Kambartel/Kaulbach (eds.). Hamburg: Meiner.

Frege, G. 1990. *Kleine Schriften*, Angelelli (ed.). Hildesheim: Olms.

Gentzen, G. 1936. Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie. *Mathematische Annalen 112*, 493–565.

Gödel, K. 1930. Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls. *Monatshefte für Mathematik und Physik 37*, 349–360.

Gödel, K. 1931. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme. *Monatshefte für Mathematik und Physik 38*, 173–198.

Heck, R. Jr. 1995. Definition by Induction in Frege's Grundgesetze der Arithmetik. In: Demopoulos, W. (ed.). *Frege's Philosophy of Mathematics*. Cambridge MA: Harvard UP.

Hilbert, D. 1930. Naturerkennen und Logik. *Die Naturwissenschaften 18*, 959–963.

Kambartel, F./Stekeler-Weithofer, P. 2005. *Sprachphilosophie. Probleme und Methoden.* Stuttgart: Reclam.

Kolman, V. 2005. Lässt sich der Logizismus retten? *Allgemeine Zeitschrift für Philosophie 30*, 159–174.

Kolman, V. 2007. Logicism and the Recursion Theorem. In: Tomala, O./Honzík, R. (eds.). *Logica Yerbook 2006*, Prag: Filosofia.

Lorenzen, P. 1955. *Einführung in die operative Logik und Mathematik*. Berlin: Springer.

Lorenzen, P. 1962a. *Metamathematik*. Mannheim: Bibliographisches Institut.

Lorenzen, P. 1962b. Gleichheit und Abstraktion. *Ratio 4*, 77–81.

Lorenzen, P. 1984. *Normative Logic and Ethics.*, Mannheim: Bibliographisches Institut.

Lorenzen, P. 1987. *Lehrbuch der konstruktiven Wissenschaftstheorie*. Mannheim: Bibliographisches Institut.

Lorenzen, P./Lorenz, K. 1978. *Dialogische Logik*. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Poincaré, H. 1906a. Les mathématiques et la logique II. *Revue de métaphysique et de morale 14, 17–34.*

Poincaré, H. 1906b. Les mathématiques et la logique III. *Revue de métaphysique et de morale 14, 294–317.*

Potter, M. 2002. *The Reason's Nearest Kin.* Oxford: Oxford UP.

Schütte, K. 1960. *Beweistheorie.* Berlin: Springer.

Shapiro, S. 1991. *Foundations without Foundationalism. A Case for Second-order Logic.* Oxford: Oxford UP.

Shapiro, S. (ed.) 2005. *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*. Oxford: Oxford UP.

Smith, P. 2007. *An Introduction to Gödel's Theorems*. Oxford: Oxford UP.

Stekeler-Weithofer, P. 1986. *Grundprobleme der Logik. Elemente einer Kritik der formalen Vernunft*. Berlin: de Gruyter.

Stekeler-Weithofer, P. 2003. Wahrheitswert- und Regellogik. In: Max, I. (ed.). *Traditionelle und moderne Logik*. Leipzig: Leipziger Universitätsverlag.

Thiel, C. 1995. *Philosophie und Mathematik. Eine Einführung in ihre Wechselwirkungen und die Philosophie der Mathematik*. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Wittgenstein, L. 1922. *Tractatus logico-philosophicus*. London: Routledge.

Wittgenstein, L. 1953. *Philosophische Untersuchungen.* Oxford: Blackwell.

Wittgenstein, L. 1984a. *Philosophische Bemerkungen.* Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Wittgenstein, L. 1984b. *Philosophische Grammatik*. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Wright, C. 1983. *Frege's Conception of Numbers as Objects.* Aberdeen: Aberdeen UP.