Cvičení ke kursu *Vlastnosti axiomatických teorií* (11. ledna 2025)

Cvičení

1. Nechť P a Q jsou unární a R binární predikát. Dokažte, že následující sentence jsou logicky platné, ale obrátíme-li (vnější) implikaci, ve všech případech vznikne sentence, která logicky platná není:

   $\exists x(P(x) \,\&\, Q(x)) \to \exists x P(x) \,\&\, \exists x Q(x)$,
   $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \to \forall x(P(x) \vee Q(x))$,
   $\exists x \forall y R(x,y) \to \forall y \exists x R(x,y)$,
   $\forall x(P(x) \to Q(x)) \to (\forall x P(x) \to \forall x Q(x))$,
   $\forall x(P(x) \to Q(x)) \to (\exists x P(x) \to \exists x Q(x))$.

2. Jsou $\forall x(P(x) \to \forall y P(y))$, $\exists x(P(x) \to \forall y P(y))$ a $\exists x(\exists y P(y) \to P(x))$ logicky platnými sentencemi?

3. U těch sentencí z předchozích dvou cvičení, které jsou logicky platné, zdůvodněte jejich dokazatelnost v hilbertovském kalkulu. Využijte tautologické důsledky a dokazatelnost tautologií, avšak obejděte se bez věty o úplnosti predikátového kalkulu.

4. Dokažte, že pro libovolné formule φ a ψ a množinu formulí Δ platí $\Delta, \psi \models \varphi$, právě když $\Delta \models \psi \to \varphi$.

5. Teorie T a S jsou *ekvivalentní*, jestliže každý axiom teorie S vyplývá z T a zároveň každý axiom teorie T vyplývá z S. Dokažte, že T a S jsou ekvivalentní, právě když mají stejné modely (tj. každý model teorie T je zároveň modelem teorie S a naopak).

6. Nechť φ je formule v jazyce L. Uvažujte podmínky (i) existuje číslo n a termy $t_1, \ldots, t_n$ jazyka L takové, že formule $\varphi_x(t_1) \vee \ldots \vee \varphi_x(t_n)$ je logicky platná, a (ii) formule $\exists x \varphi$ je logicky platná. Zdůvodněte, že z (i) plyne (ii), ale opačné tvrzení (ii) $\Rightarrow$ (i) obecně neplatí.

   Návod. Zvolte jazyk $\{P\}$ a formuli $P(x) \to \forall v P(v)$. Protože funkční symboly v jazyce nejsou, termy $t_1, \ldots, t_n$ musí být proměnnými, řekněme $z_1, \ldots, z_n$, kde některé z_i mohou být totožné. Ale žádná disjunkce tvaru $\bigvee_i (P(z_i) \to \forall v P(v))$ logicky platná není.

7. Tvrzení, že je-li navíc φ otevřená, pak podmínky (i) and (ii) v předchozím cvičení jsou ekvivalentní, platí. Je známé jako Hilbertova-Ackermannova věta, ale v přednášce zmíněné nebylo. Zdůvodněte, že v této větě by se nedalo vystačit s jediným termem: je-li φ otevřená formule v jazyce L a formule $\exists x\varphi$ je logicky platná, pak nemusí existovat term t jazyka L takový, že formule $\varphi_x(t)$ je logicky platná.

   Návod. Uvažujte jazyk $\{P, F\}$ s unárním predikátem a unární funkcí, a vezměte formuli $P(x) \vee \neg P(F(x))$. Term t musí mít tvar $F^{(m)}(z)$, kde z je proměnná.

8. K formuli φ z návodu k předchozímu cvičení najděte n a termy $t_1, .., t_n$ jazyka L takové, že formule $\varphi_x(t_1) \vee \,..\, \vee \varphi_x(t_n)$ je logicky platná.

9. Nechť T je teorie s jazykem $\{\in\}$ s jediným binárním predikátem a s axiomy
   $\forall x \forall y(\forall v(v \in x \equiv v \in y) \to x = y)$,
   $\exists x \forall v \neg(v \in x)$,
   $\forall x \forall y \exists z \forall v(v \in x \vee v = y \to v \in z)$.

   (a) Dokažte pomocí konečných modelů, že $\forall x(x \notin x)$ a $\neg\exists x \forall v(v \in x)$ jsou sentence nedokazatelné v T.
   (b) Dokažte, že žádný z axiomů teorie T není dokazatelný z ostatních dvou.

10. Uvažujte teorii T s prázdným jazykem a prázdnou množinou axiomů. Popište všechny její modely. Najděte její rozšíření S v tomtéž (prázdném) jazyce, které je bezesporné a nemá žádné konečné modely.

11. Pro každou ze struktur $\langle \mathrm{N}, < \rangle$, $\langle \mathrm{Z}, < \rangle$ a $\langle \mathrm{Q}, < \rangle$ najděte sentenci, která v ní platí, ale neplatí v ostatních dvou. Lze také struktury $\mathbb{R}$ a $\mathbb{Q}$ odlišit platností nějaké sentence? A co struktury $\langle \mathrm{Z}, + \rangle$ a $\langle \mathrm{Q}, + \rangle$?

12. Dokažte, že struktury $\langle \mathrm{R}, < \rangle$ a $\langle \mathrm{R} - \{0\}, < \rangle$ spolu nejsou izomorfní, ale jsou elementárně ekvivalentní.

    Návod. V první z nich má každá neprázdná shora omezená množina supremum. O druhé to pravda není. Obě struktury jsou modely téže úplné teorie.

13. Zdůvodněte s užitím Vaughtova testu, že teorie S z cvičení 10 je úplná.

14. Dokažte, že je-li teorie T ekvivalentní (ve smyslu cvičení 5) s nějakou konečnou množinou sentencí, pak je ekvivalentní i s vlastní konečnou podmnožinou. Vyvoďte z toho, že teorie z cvičení 10 není konečně axiomatizovatelná. Ani teorie SUCC není konečně axiomatizovatelná.

15. Dokažte že když třída $\mathcal{C}$ struktur pro určitý jazyk je axiomatizovatelná a její komplement $-\mathcal{C}$ (tj. třída všech struktur pro týž jazyk, které nejsou v $\mathcal{C}$) je také axiomatizovatelný, pak $\mathcal{C}$ i $-\mathcal{C}$ jsou dokonce konečně axiomatizovatelné.

16. Dokažte, že třída všech souvislých neorientovaných grafů, chápaných jako struktury pro jazyk s binárním predikátem jako jediným symbolem, není axiomatizovatelná.

17. Uvažujte třídu všech struktur $\langle D, P\rangle$ pro jazyk s jedním unárním predikátem takových, že P i $D - P$ jsou nekonečné. Dokažte, že tato třída je axiomatizovatelná. Je konečně axiomatizovatelná? Rozhodněte, pro která κ je příslušná teorie κ-kategorická.

18. Zdůvodněte, že teorie, která má jazyk $\{+, 0, \mathrm{S}\}$ a axiomy

    Q1: $\forall x \forall y (\mathrm{S}(x) = \mathrm{S}(y) \to x = y)$

    Q2: $\forall x (\mathrm{S}(x) \neq 0)$

    Q3: $\forall x (x \neq 0 \to \exists y (\mathrm{S}(y) = x))$

    Q4: $\forall x (x + 0 = x)$

    Q5: $\forall x \forall y (x + \mathrm{S}(y) = \mathrm{S}(x + y))$,

    je konzervativním rozšířením teorie s axiomy Q1–Q3.

19. Stejným postupem dokažte, že přidáním axiomů Q4 a Q5 k SUCC vznikne teorie, která je konzervativním rozšířením teorie SUCC. Totéž dokažte jednodušeji na základě tohoto faktu: *každé bezesporné rozšíření úplné teorie je konzervativní.* Tento fakt zdůvodněte. Vysvětlete, že tedy i $\mathrm{Th}(\langle \mathrm{N}, +, 0, \mathrm{s}\rangle)$ je konzervativním rozšířením teorie SUCC. Zdůvodněte, že toto poslední tvrzení nelze dokázat metodou z předchozího cvičení: struktura $\langle \mathrm{N}, 0, \mathrm{s}\rangle + \langle \mathrm{Z}, \mathrm{s}\rangle$ nemá žádnou expanzi, která je modelem teorie $\mathrm{Th}(\langle \mathrm{N}, +, 0, \mathrm{s}\rangle)$.

    Návod. Sčítání v dané struktuře nelze definovat tak, aby platily sentence $\forall x \exists y (x = y + y \ \vee \ x = \mathrm{S}(y + y))$ a $\forall x \forall y \forall z (z + x = z + y \ \to \ x = y)$.

20. Dokažte, že každé přirozené číslo je definovatelným prvkem struktury $\langle \mathrm{N}, < \rangle$. Nechť dále R je relace $\{\, [a, b]\,;\ |a - b| = 1 \,\}$. Dokažte, že i ve struktuře $\langle \mathrm{N}, R\rangle$ je každé přirozené číslo definovatelným prvkem.

21. Užijte Postovu větu k důkazu, že když $X \subseteq \mathrm{N}^q$ a $Y \subseteq \mathrm{N}^q$ jsou *RE* množiny takové, že $X \cup Y$ je rekurzívní a $X \cap Y = \emptyset$, pak X i Y jsou rekurzívní.

22. Dokažte, že když $f : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ je rostoucí rekurzívní funkce, pak $\mathrm{Rng}(f)$ je rekurzívní množina.

    Hint. Nejprve dokažte indukcí, že $\forall n (n \leq f(n))$. Využijte omezené kvantifikátory.

23. Dokažte, že když $R \subseteq \mathrm{N}^2$ je ekvivalence, která má pouze konečně mnoho tříd (tříd ekvivalence) a je *RE*, pak R je dokonce rekurzívní.

Návod. Nechť $A_1 \ldots, A_n$ je seznam všech tříd ekvivalence R. Zdůvodněte podrobně následující fakta. Každá A_i je *RE*, její komplement také a ze seznamu $A_1 \ldots, A_n$ lze relaci R definovat rekurzívní podmínkou.

24. Dokažte, že rovnost $\mathrm{Thm}(T) = \bigcap\{\, \mathrm{Thm}(S)\ ;\ S$ je úplné rozšíření $T\,\}$ platí pro libovolnou teorii T. Na základě toho zdůvodněte, že když teorie T má pouze konečně mnoho navzájem neekvivalentních úplných rozšíření v tomtéž jazyce a všechna jsou rozhodnutelná, pak T je rozhodnutelná. Použijte tento fakt k důkazu, že teorie vzniklá z teorie DNO odstraněním axiomů týkajících se největších a nejmenších objektů je rozhodnutelná.

    Návod. Daná teorie má pouze čtyři úplná rozšíření (největší objekt existuje, nebo neexistuje, a nezávisle na tom, nejmenší objekt existuje, nebo neexistuje) a na všechna lze aplikovat Vaughtův test.

25. Dokažte, že každá rekurzívní množina je m-převeditelná na každou množinu, která je neprázdná a má neprázdný doplněk. Zdůvodněte, že když A je m-převeditelná na $\emptyset$, pak $A = \emptyset$, a když A je m-převeditelná na N, pak $A = \mathrm{N}$.

26. Nechť $Y \subseteq \mathrm{N}$ je *RE* nerekurzívní množina. Zdůvodněte, že $X = \{2n; n \in Y\}$ je také *RE* a nerekurzívní. Uvažujte jazyk $\{0, \mathrm{S}, P\}$, kde P je unární predikát. Nechť T je teorie, jejíž množina axiomů je $\mathsf{SUCC} \cup \{\, P(\overline{n})\ ;\ n \in X \,\}$. Nechť S je $(T + \forall x P(x))$. Která z teorií T a S je rekurzívně axiomatizovatelná? Která z nich je konzervativním rozšířením teorie SUCC? Která z nich je úplná? A která z nich je rozhodnutelná?

    Návod. Zdůvodněte, že například sentence $\exists x(P(x)\ \&\ P(\mathrm{S}(x)))$ je nezávislá na T. Dále zdůvodněte, že S připouští eliminaci kvantifikátorů.

27. Dokažte, že pro každou dvojici *RE* množin A a B existují *RE* množiny X a Y takové, že $X \cup Y = A \cup B$, $X \cap Y = \emptyset$, $A - B \subseteq X$ a $B - A \subseteq Y$.

28. Vyvoďte z předchozího cvičení, že disjunktní Π_1 množiny A a B jsou vždy rekurzívně oddělitelné, tj. existuje k nim rekurzívní množina D taková, že $A \subseteq D$ a $D \cap B = \emptyset$.