

Cvičení ke kursu *Vyčísitelnost* (11. ledna 2016)

1. Odvoďte funkci $[x, y, z] \mapsto x \cdot y \cdot z$ ze základních funkcí pomocí operace \circ .
2. Dokažte, že relace nesoudělnosti je Δ_0 . Dokažte, že grafy funkcí Mod a Div jsou Δ_0 .
3. Necht χ a ψ jsou částečné funkce jedné proměnné. Rozhodněte, zda platí:
 - (a) Když $\chi \circ \psi$ je totální, pak i ψ je totální.
 - (b) Když $\chi \circ \psi$ je totální, pak i χ je totální.

4. Je-li $A \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ rekurzivní množina, pak funkce ψ definovaná předpisem

$$\psi(\underline{x}) = \begin{cases} \min\{y; A(\underline{x}, y)\} & \text{když } \exists y A(\underline{x}, y) \\ \uparrow & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde \uparrow znamená “nedefinováno”, je částečně rekurzivní. Dokažte.

5. Dokažte, že funkce z a s lze ze zbývajících základních funkcí odvodit pomocí operací \circ a μ . Tyto dvě funkce by tedy v definici rekurzivních funkcí být nemusely.

Návod. Funkci z lze ze základních funkcí odvodit jediným krokem. Před odvozením funkce s odvoďte funkci $x \mapsto 1$, tj. konstantu jedné proměnné s hodnotou 1. K tomu lze využít funkci neg použitou v přednášce: jednička je nejmenší číslo, které se nerovná nule.

6. Jsou-li g a h dvě rekurzivní funkce, pak i funkce f , která má v bodech $0, 1, 2, 3, 4, \dots$ hodnoty $g(0), h(0), g(1), h(1), g(2), \dots$, je rekurzivní. Dokažte.
7. Dokažte, že obor hodnot libovolné *rostoucí* rekurzivní funkce jedné proměnné je rekurzivní množina.

Návod. Nejprve dokažte, že je-li f rostoucí, pak vždy $f(x) \geq x$, a pak využijte omezené kvantifikátory.

8. (a) Necht ψ je částečná funkce, která má rekurzivní graf. Necht je ψ navíc omezena rekurzivní funkcí g (stejného počtu proměnných), tj. pro každou k -tici $[x_1, \dots, x_k]$ z definičního oboru $\text{Dom}(\psi)$ funkce ψ platí $\psi(\underline{x}) \leq g(\underline{x})$. Musí pak $\text{Dom}(\psi)$ být rekurzivní množinou?
 - (b) Je-li obecně rekurzivní funkce f jedné proměnné prostá a *na*, pak i k ní inverzní funkce f^{-1} je obecně rekurzivní. Dokažte.

9. Rozhodněte, zda platí: je-li $A \subseteq \mathbb{N}^2$ rekurzivně spočetná relace taková, že $\forall x \exists y A(x, y)$, pak existuje rekurzivní funkce g taková, že pro každé x platí $g(x) = \min\{y; A(x, y)\}$.

Návod. Uvažujte relaci $A = \{[x, y]; x \in \mathbb{K} \vee y \geq 1\}$.

10. Necht A je binární rekurzivně spočetná relace. Dokažte, že existuje částečně rekurzivní funkce β (výběrová funkce pro relaci A), pro kterou platí

$$!\beta(x) \Leftrightarrow \exists y A(x, y), \quad !\beta(x) \Rightarrow A(x, \beta(x)).$$

Návod. Modifikujte důkaz tvrzení, že funkce s rekurzivně spočetným grafem musí být částečně rekurzivní.

11. (a) Vyvodte z předchozího cvičení větu o separaci: ke každé dvojici rekurzivně spočetných množin A, B existují rekurzivně spočetné množiny X, Y takové, že $X \cup Y = A \cup B$, $X \cap Y = \emptyset$, $A - B \subseteq X$ a $B - A \subseteq Y$.

(b) Jsou-li A a B dvě disjunktní množiny, jejichž komplementy jsou rekurzivně spočetné, pak A, B jsou rekurzivně oddělitelné v tom smyslu, že existuje rekurzivní množina D taková, že $A \subseteq D$ a $D \cap B = \emptyset$. Dokažte.

12. Necht R je binární rekurzivně spočetná relace na \mathbb{N} taková, že R je ekvivalence a má jen konečně mnoho tříd. Dokažte, že R je rekurzivní.

Návod. Zdůvodněte, že je-li R rekurzivně spočetná (množina dvojic), pak každá její třída (třída ekvivalence) je rekurzivně spočetná množina (čísel). Zobecněte Postovu větu na konečný počet rekurzivně spočetných množin. Nakonec zdůvodněte, že když každá z konečně mnoha tříd je rekurzivní, pak i R jako množina dvojic je rekurzivní.

13. Necht A je rekurzivní množina. Dokažte, že funkce $x \mapsto |A \cap x|$, která každému x přiřazuje počet prvků množiny A menších než x , je rekurzivní.

Návod. Použijte primitivní rekurzi.

14. Ke každé obecně rekurzivní funkci f s nekonečným oborem hodnot existuje prostá obecně rekurzivní funkce g se stejným oborem hodnot. Dokažte.

Návod. Předpisem $g(x) = f(\mu y (f(y) \notin \{g(0), \dots, g(x-1)\}))$, tj. pomocí zobecněné (ordinální) primitivní rekurze, lze funkci g odvodit z funkce f . K důkazu, že obě funkce mají stejný obor hodnot, použijte toto tvrzení: platí-li $|\{f(0), \dots, f(y-1)\}| = x$, pak $\{f(0), \dots, f(y-1)\} = \{g(0), \dots, g(x-1)\}$. Toto tvrzení dokažte indukcí podle y .

15. Dokažte, že každá nekonečná rekurzivně spočetná množina obsahuje nekonečnou rekurzivní podmnožinu.

16. Dokažte, že každý vývojový diagram je ekvivalentní s diagramem, který neobsahuje jiné instrukce než INC, CLR a porovnávání $X=Y$.

17. Dokažte, že každý vývojový diagram je ekvivalentní s diagramem, který neobsahuje jiné instrukce než INC, DEC a $X=Y$.

18. Šlo by každou částečně rekurzivní funkci odvodit za omezení, že minimalizace se smí použít pouze na totální funkci?

Návod. Všimněte si, že v důkazu tvrzení, že funkce s rekurzivně spočetným grafem je částečně rekurzivní, je minimalizace použita na Δ_0 podmínku, tedy na totální funkci určitého tvaru. Dále zkontrolujte důkaz tvrzení, že každá Δ_0 podmínka je rekurzivní: všechny minimalizace tam jsou použity na totální funkce.

19. Rozhodněte, zda graf a definiční obor funkcí α a β definovaných předpisem

$$\alpha(x) \simeq \mu y T(x, x, y) \quad \text{a} \quad \beta(x) \simeq z(\mu y T(x, x, y)),$$

kde z je konstantní funkce s hodnotou nula, jsou obecně rekurzivní.

Návod. Všimněte si, že pro funkci β platí ekvivalence $\forall(x \in \mathbb{K} \Leftrightarrow [x, 0] \in \text{Graf}(\beta))$, a vyvodte z toho, že $\text{Graf}(\beta)$ rekurzivní není.

20. Uvažujte třídu všech funkcí, které jsou odvoditelné ze základních pomocí substituce a minimalizace, ale s omezením, že *obě* operace se smějí použít jen na totální funkce. Obsahuje tato třída i nějaké netotální funkce? Obsahuje tato třída všechny částečně rekurzivní funkce?

Návod. Úvaha o grafu funkce α z předchozího cvičení se dá zobecnit na tvrzení známé jako Skolemova věta: funkce odvoditelná jedním použitím minimalizace na totální funkci musí mít rekurzivní graf. Dále uvažte funkci β z předchozího cvičení a rozmyslete si fakt, že v odvození netotální funkce, v němž jsou obě operace vždy použity pouze na totální funkce, musí posledním krokem být minimalizace (použitá na totální funkci).

21. (Věta o parametrech) V každém z následujících případů rozhodněte, zda existuje funkce g s popsanou vlastností:

(a) $W_{g(x)} = K \cap \{0, 1, \dots, x\}$,

(b) $W_{g(x,y)} = W_x \cup \{y\}$,

(c) $W_{g(x)} = f^{-1}W_x$, kde f je rekurzivní funkce jedné proměnné,

(d) $W_{g(x)} = \begin{cases} \emptyset & \text{když } x \in K \\ \{x\} & \text{jinak,} \end{cases}$

(e) $W_{g(x)} = \begin{cases} \mathbb{N} - \{x\} & \text{když } x \in K \\ \{x\} & \text{jinak,} \end{cases}$

(f) $W_{g(x)} = \{v ; T(x, x, v) \ \& \ \forall u < v \neg T(x, x, u)\}$,

(g) $\varphi_{g(x)}(v) \simeq \mu w T(x, x, w)$
(t.j. $g(x)$ je index funkce, která nezávisí na vstupu v),

(h) $\varphi_{g(x)}(v) \simeq \begin{cases} 0 & \text{když } \forall u \leq v \neg T(x, x, u) \\ \uparrow & \text{jinak,} \end{cases}$

(i) $W_{g(x)} = \{v ; \forall u \leq v \exists w T(x, u, w)\}$,

(j) $W_{g(x)} = \begin{cases} \mathbb{N} & \text{když } x \in K \\ \{x\} & \text{jinak.} \end{cases}$

Návod. V případě (d) platí NE. Množiny $\{x ; W_{g(x)} \neq \emptyset\}$ a K by byly rekurzivně spočetné a navzájem komplementární. V případě (e) také platí NE.

22. Pro každou z následujících množin rozhodněte, zda K a $\neg K$ je na ni m -převoditelná:

(a) $\{x ; W_x = \emptyset\}$,

(b) $\{x ; \varphi_x \text{ je totální}\}$,

(c) $\{x ; W_x \text{ je jednoprvková}\}$,

(d) $\{x ; W_x \text{ je konečná}\}$,

(e) $\{x ; W_x \text{ je rekurzivní}\}$.

Návod. K není převeditelná na množinu v (a), protože komplement oné množiny je rekurzivně spočetný. Všechny ostatní převeditelnosti platí a většinou lze využít některou z funkcí z bodů (d)–(i) z cvičení 21.

23. Operace \oplus je na množinách přirozených čísel definována takto:

$$A \oplus B = \{ 2x ; x \in A \} \cup \{ 2x + 1 ; x \in B \}.$$

Dokažte, že platí

(a) $A \leq_m A \oplus B, \quad B \leq_m A \oplus B.$

(b) Je-li X taková, že $A \leq_m X$ i $B \leq_m X$, pak $A \oplus B \leq_m X$.

24. Pro množiny $A, B \subseteq \mathbb{N}$ označme

$$A \otimes B = \{ (x, y) ; x \in A \ \& \ y \in B \},$$

kde kulaté závorky označují párovací funkci (tedy $A \otimes B$ je množina čísel, nikoliv dvojic).

(a) Platí $A \leq_m A \otimes B$ pro každou dvojici množin A a B ?

(b) Platí $K \oplus -K \leq_m K \otimes -K$?

(c) Platí $K \oplus -K \leq_m -(K \oplus -K)$?

(d) Je $K \oplus -K$ m -převeditelná na některou z množin K a $-K$?

(e) Je $K \otimes -K$ m -převeditelná na některou z množin K a $-K$?

25. Dokažte, že množiny $\text{Tot} = \{ x ; \varphi_x \text{ je totální} \}$ a $\text{Unb} = \{ x ; W_x \text{ je nekonečná} \}$ jsou navzájem m -převeditelné.

Návod. Pro $\text{Tot} \leq_m \text{Unb}$ lze také využít jednu z funkcí z cvičení 21. Pro $\text{Unb} \leq_m \text{Tot}$ použijte funkci g , pro kterou platí: pro každé x , funkce $v \mapsto \varphi_{g(x)}(v)$ hledá (a vyhledá, pokud existuje) nějaký prvek množiny W_x , který je větší než v . K důkazu existence takové funkce použijte cvičení 10.

26. Necht D je konečná neprázdná množina. Dokažte, že množiny $\{ x ; W_x = D \}$ a $K \otimes -K$ jsou na sebe navzájem m -převeditelné (pozor, není zde řeč o množině $\{ x ; W_x \text{ je konečná} \}$, množina D je jedna pevná a pracujeme s množinou všech jejích indexů).

Návod. Z kompletnosti množiny K plyne, že každá množina tvaru $A \cap B$, kde $A \in \Sigma_1$ a $B \in \Pi_1$, je m -převeditelná na $K \otimes -K$. K důkazu, že $K \otimes -K \leq_m \{ x ; W_x = D \}$, užitě obecně rekurzivní funkci g , pro kterou platí: $W_{g(x)} = \emptyset$, když $l(x) \notin K$ a $r(x) \notin K$, dále $W_{g(x)} = D$, když $l(x) \in K$ a $r(x) \notin K$, a konečně $W_{g(x)} = \mathbb{N}$, když $r(x) \in K$.

27. Navrhněte aritmetickou klasifikaci pro následující množiny:

(a) $\{ x ; W_x = \emptyset \},$

(b) $\{ x ; W_x \text{ je konečná} \},$

(c) $\{ x ; -W_x \text{ je konečná} \},$

(d) $\{ x ; W_x \text{ je kompletní RE množina} \}.$

28. (Věta o rekurzi) Rozhodněte, zda existuje číslo m , pro které platí $W_m = \mathbb{N} - \{m\}$. Existuje číslo splňující podmínku $W_m = \{ x ; \neg \varphi_m(x) \}$?

29. Dokažte, že pro každou dvojici obecně rekurzivních funkcí g a h existují čísla a a b taková, že zároveň platí

$$W_a = W_{g(a,b)}, \quad W_b = W_{h(a,b)}.$$

Návod. Použijte dvakrát větu o rekurzi. Nejprve sestavte rovnici pro neznámou funkci. S užitím oné funkce pak sestavte rovnici pro neznámé číslo.

30. Dokažte, že $K \otimes -K$ není m -převeditelná na $K \oplus -K$.

Návod. Kdyby ano, z cvičení 24 by plynulo, že $K \otimes -K$ je m -převeditelná na svůj komplement. Dále vezměte v úvahu tvrzení z cvičení 26 a Riceovu větu.

31. Dokažte, že průnik dvou prostých množin je opět prostá množina. Sjednocení dvou prostých množin je množina, která je prostá, nebo má konečný doplněk.

Syllabus

Kurs je sestavena zhruba podle kapitol 1–8 a zčásti 11 a 14 knihy [2]. Úvodní část je mnohem podrobnější než v [2] a využívá ostatní zdroje. Některé ze základních pojmů lze vyčíst také z oddílu 2.2 knihy [3].

Reference

- [1] P. Odifreddi. *Classical Recursion Theory*. North-Holland, Amsterdam, 1989.
- [2] H. Rogers, Jr. *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*. McGraw-Hill, New York, 1967.
- [3] V. Švejdar. *neúplnost, složitost a nutnost*. Academia, Praha, 2002.