Cvičení ke kursu *Vyčíslitelnost*
(23. prosince 2017)

1. Odvoďte funkci $[x, y, z] \mapsto x \cdot y \cdot z$ ze základních funkcí pomocí operace $\circ$.

2. Dokažte, že relace nesoudělnosti je Δ_0. Dokažte, že grafy funkcí Mod a Div jsou Δ_0.

3. Nechť χ a ψ jsou částečné funkce jedné proměnné. Rozhodněte, zda platí:
   (a) Když $\chi \circ \psi$ je totální, pak i ψ je totální.
   (b) Když $\chi \circ \psi$ je totální, pak i χ je totální.

4. Je-li $A \subseteq \mathrm{N}^{k+1}$ rekurzívní množina, pak funkce ψ definovaná předpisem

$$\psi(\underline{x}) = \begin{cases} \min\{\, y \,;\ A(\underline{x}, y)\,\} & \text{když } \exists y A(\underline{x}, y) \\ \uparrow & \text{jinak,} \end{cases}$$

   kde $\uparrow$ znamená “nedefinováno”, je částečně rekurzívní. Dokažte.

5. Dokažte, že funkce z a s lze ze zbývajících základních funkcí odvodit pomocí operací $\circ$ a μ. Tyto dvě funkce by tedy v definici rekurzívních funkcí být nemusely.

   Návod. Funkci z lze ze základních funkcí odvodit jediným krokem. Před odvozením funkce s odvoďte funkci $x \mapsto 1$, tj. konstantu jedné proměnné s hodnotou 1. K tomu lze využít funkci neg použitou v přednášce: jednička je nejmenší číslo, které se *ne*rovná nule.

6. Jsou-li g a h dvě rekurzívní funkce, pak i funkce f, která má v bodech 0, 1, 2, 3, 4, ... hodnoty $g(0)$, $h(0)$, $g(1)$, $h(1)$, $g(2)$, ..., je rekurzívní. Dokažte.

7. Dokažte, že obor hodnot libovolné *rostoucí* rekurzívní funkce jedné proměnné je rekurzívní množina.

   Návod. Nejprve dokažte, že je-li f rostoucí, pak vždy $f(x) \geq x$, a pak využijte omezené kvantifikátory.

8. (a) Nechť ψ je částečná funkce, která má rekurzívní graf. Nechť je ψ navíc omezena rekurzívní funkcí g (stejného počtu proměnných), tj. pro každou k-tici $[x_1, \ldots, x_k]$ z definičního oboru $\mathrm{Dom}(\psi)$ funkce ψ platí $\psi(\underline{x}) \leq g(\underline{x})$. Musí pak $\mathrm{Dom}(\psi)$ být rekurzívní množinou?
   (b) Je-li obecně rekurzívní funkce f jedné proměnné prostá a *na*, pak i k ní inverzní funkce f^{-1} je obecně rekurzívní. Dokažte.

9. Rozhodněte, zda platí: když $A \subseteq \mathrm{N}^2$ je *RE* relace taková, že $\forall x \exists y A(x,y)$, pak existuje rekurzívní funkce g splňující podmínku $\forall x(g(x) = \min\{y;\, A(x,y)\})$.

   Návod. Uvažujte relaci $A = \{\, [x,y]\,;\, x \in \mathrm{K} \;\vee\; y \geq 1\,\}$.

10. Nechť A je binární rekurzívně spočetná relace. Dokažte, že existuje částečně rekurzívní funkce β (výběrová funkce pro relaci A), pro kterou platí

$$!\beta(x) \Leftrightarrow \exists y A(x,y), \qquad !\beta(x) \Rightarrow A(x,\beta(x)).$$

   Návod. Modifikujte důkaz tvrzení, že funkce s rekurzívně spočetným grafem musí být částečně rekurzívní.

11. (a) Vyvoďte z předchozího cvičení *větu o separaci:* ke každé dvojici rekurzívně spočetných množin A, B existují rekurzívně spočetné množiny X, Y takové, že $X \cup Y = A \cup B$, $X \cap Y = \emptyset$, $A - B \subseteq X$ a $B - A \subseteq Y$.
    (b) Jsou-li A a B dvě disjunktní množiny, jejichž komplementy jsou rekurzívně spočetné, pak A a B jsou rekurzívně oddělitelné v tom smyslu, že existuje rekurzívní množina D taková, že $A \subseteq D$ a $D \cap B = \emptyset$. Dokažte.

12. Nechť R je binární rekurzívně spočetná relace na N taková, že R je ekvivalence a má jen konečně mnoho tříd. Dokažte, že R je rekurzívní.

    Návod. Zdůvodněte, že je-li R rekurzívně spočetná (množina dvojic), pak každá její třída (třída ekvivalence) je rekurzívně spočetná množina (čísel). Zobecněte Postovu větu na konečný počet rekurzívně spočetných množin. Nakonec zdůvodněte, že když každá z konečně mnoha tříd je rekurzívní, pak i R jako množina dvojic je rekurzívní.

13. Nechť A je rekurzívní množina. Dokažte, že funkce $x \mapsto |A \cap x|$, která každému x přiřazuje počet prvků množiny A menších než x, je rekurzívní.

    Návod. Použijte primitivní rekurzi.

14. Ke každé obecně rekurzívní funkci f s nekonečným oborem hodnot existuje prostá obecně rekurzívní funkce g se stejným oborem hodnot. Dokažte.

    Návod. Předpisem $g(x) = f(\mu y(f(y) \notin \{g(0),..,g(x-1)\}))$, tj. pomocí zobecněné (ordinální) primitivní rekurze, lze funkci g odvodit z funkce f. K důkazu, že obě funkce mají stejný obor hodnot, použijte toto tvrzení: platí-li $|\{f(0),..,f(y-1)\}| = x$, pak $\{f(0),..,f(y-1)\} = \{g(0),..,g(x-1)\}$. Toto tvrzení dokažte indukcí podle y.

15. Dokažte, že každá nekonečná rekurzívně spočetná množina obsahuje nekonečnou rekurzívní podmnožinu.

16. Dokažte, že každý vývojový diagram je ekvivalentní s diagramem, který neobsahuje jiné instrukce než INC, CLR a porovnávání $X = Y$? .

17. Dokažte, že každý vývojový diagram je ekvivalentní s diagramem, který neobsahuje jiné instrukce než INC, DEC a $X = Y?$.

18. Šlo by každou částečně rekurzívní funkci odvodit za omezení, že minimalizace se smí použít pouze na totální funkci?

    Návod. Všimněte si, že v důkazu tvrzení, že funkce s rekurzívně spočetným grafem je částečně rekurzívní, je minimalizace použita na $\varDelta_0$ podmínku, tedy na totální funkci určitého tvaru. Dále zkontrolujte důkaz tvrzení, že každá $\varDelta_0$ podmínka je rekurzívní: všechny minimalizace tam jsou použity na totální funkce.

19. Rozhodněte, zda graf a definiční obor funkcí α a β definovaných předpisem

$$\alpha(x) \simeq \mu y \mathrm{T}(x,x,y) \quad \text{a} \quad \beta(x) \simeq \mathrm{z}(\mu y \mathrm{T}(x,x,y)),$$

    kde z je konstantní funkce s hodnotou nula, jsou obecně rekurzívní.

    Návod. Pro funkci β platí ekvivalence $\forall(x \in \mathrm{K} \Leftrightarrow [x,0] \in \mathrm{Graf}(\beta))$. Z toho vyvoďte, že $\mathrm{Graf}(\beta)$ rekurzívní není.

20. Uvažujte třídu všech funkcí, které jsou odvoditelné ze základních pomocí substituce a minimalizace, ale s omezením, že *obě* operace se smějí použít jen na totální funkce. Obsahuje tato třída i nějaké netotální funkce? Obsahuje tato třída všechny částečně rekurzívní funkce?

    Návod. Úvaha o grafu funkce α z předchozího cvičení se dá zobecnit na tvrzení známé jako Skolemova věta: funkce odvoditelná jedním použitím minimalizace na totální funkci musí mít rekurzívní graf. Dále uvažte funkci β z předchozího cvičení a rozmyslete si fakt, že v odvození netotální funkce, v němž jsou obě operace vždy použity pouze na totální funkce, musí posledním krokem být minimalizace (použitá na totální funkci).

21. (Věta o parametrech) V každém z následujících případů rozhodněte, zda existuje funkce g s popsanou vlastností:

    (a) $\mathrm{W}_{g(x)} = \mathrm{K} \cap \{0,1,..,x\}$,

    (b) $\mathrm{W}_{g(x,y)} = \mathrm{W}_x \cup \{y\}$,

    (c) $\mathrm{W}_{g(x)} = f^{-1}{}''\mathrm{W}_x$, kde f je rekurzívní funkce jedné proměnné,

    (d) $\mathrm{W}_{g(x)} = \begin{cases} \emptyset & \text{když } x \in \mathrm{K} \\ \{x\} & \text{jinak,} \end{cases}$

    (e) $\mathrm{W}_{g(x)} = \begin{cases} \mathrm{N} - \{x\} & \text{když } x \in \mathrm{K} \\ \{x\} & \text{jinak,} \end{cases}$

(f) $\mathrm{W}_{g(x)} = \{\, v\,;\ \mathrm{T}(x,x,v)\ \&\ \forall u{<}v\,\neg\mathrm{T}(x,x,u)\,\}$,

(g) $\varphi_{g(x)}$ je funkce $v \mapsto \mu w\mathrm{T}(x,x,w)$ (která nezávisí na vstupu v),

(h) $\varphi_{g(x)}(v) \simeq \begin{cases} 0 & \text{když } \forall u{\le}v\,\neg\mathrm{T}(x,x,u) \\ \uparrow & \text{jinak,} \end{cases}$

(i) $\mathrm{W}_{g(x)} = \{\, v\,;\ \forall u{\le}v\,\exists w\mathrm{T}(x,u,w)\,\}$,

(j) $\mathrm{W}_{g(x)} = \begin{cases} \mathrm{N} & \text{když } x \in \mathrm{K} \\ \{x\} & \text{jinak.} \end{cases}$

Návod. V (d) platí NE. Množiny $\{\, x\,;\ \mathrm{W}_{g(x)} \neq \emptyset\,\}$ a K by byly rekurzívně spočetné a navzájem komplementární. V (e) také platí NE.

22. Pro každou z následujících množin rozhodněte, zda K a $-$K je na ni m-převeditelná:

(a) $\{\, x\,;\ \mathrm{W}_x = \emptyset\,\}$,
(b) $\{\, x\,;\ \varphi_x$ je totální $\}$,
(c) $\{\, x\,;\ \mathrm{W}_x$ je jednoprvková $\}$,
(d) $\{\, x\,;\ \mathrm{W}_x$ je konečná $\}$,
(e) $\{\, x\,;\ \mathrm{W}_x$ je rekurzívní $\}$.

Návod. K není převeditelná na množinu v (a), protože komplement oné množiny je rekurzívně spočetný. Všechny ostatní převeditelnosti platí a většinou lze využít některou z funkcí z bodů (d)–(i) z cvičení 21.

23. Operace $\oplus$ je na množinách přirozených čísel definována takto:

$$A \oplus B = \{\, 2x\,;\ x \in A\,\} \cup \{\, 2x+1\,;\ x \in B\,\}.$$

Dokažte, že platí

(a) $A \le_{\mathrm{m}} A \oplus B, \qquad B \le_{\mathrm{m}} A \oplus B$.
(b) Je-li X taková, že $A \le_{\mathrm{m}} X$ i $B \le_{\mathrm{m}} X$, pak $A \oplus B \le_{\mathrm{m}} X$.

24. Pro množiny $A, B \subseteq \mathrm{N}$ označme

$$A \otimes B = \{\, (x,y)\,;\ x \in A\ \&\ y \in B\,\},$$

kde kulaté závorky označují párovací funkci (tedy $A \otimes B$ je množina čísel, nikoliv dvojic).

(a) Platí $A \le_{\mathrm{m}} A \otimes B$ pro každou dvojici množin A a B?

(b) Platí $\mathrm{K} \oplus -\mathrm{K} \leq_{\mathrm{m}} \mathrm{K} \otimes -\mathrm{K}$?

(c) Platí $\mathrm{K} \oplus -\mathrm{K} \leq_{\mathrm{m}} -(\mathrm{K} \oplus -\mathrm{K})$?

(d) Je $\mathrm{K} \oplus -\mathrm{K}$ m-převeditelná na některou z množin K a $-$K?

(e) Je $\mathrm{K} \otimes -\mathrm{K}$ m-převeditelná na některou z množin K a $-$K?

25. Dokažte, že množiny $\mathrm{Tot} = \{x; \varphi_x \text{ je totální}\}$ a $\mathrm{Unb} = \{x; \mathrm{W}_x \text{ je nekonečná}\}$ jsou navzájem m-převeditelné.

    Návod. Pro důkaz, že $\mathrm{Tot} \leq_{\mathrm{m}} \mathrm{Unb}$, lze také využít jednu z funkcí z cvičení 21. Pro $\mathrm{Unb} \leq_{\mathrm{m}} \mathrm{Tot}$ použijte funkci g, pro kterou platí: pro každé x, funkce $v \mapsto \varphi_{g(x)}(v)$ hledá (a vyhledá, pokud existuje) nějaký prvek množiny W_x, který je větší než v. K důkazu existence takové funkce použijte cvičení 10.

26. Nechť D je konečná neprázdná množina. Dokažte, že množiny $\{\, x\,;\, \mathrm{W}_x = D \,\}$ a $\mathrm{K} \otimes -\mathrm{K}$ jsou na sebe navzájem m-převeditelné (pozor, není zde řeč o množině $\{\, x\,;\, \mathrm{W}_x \text{ je konečná} \,\}$, D je fixní a pracujeme s množinou všech jejích indexů).

    Návod. Ze Σ_1 kompletnosti množiny K plyne, že kdykoliv $A \in \Sigma_1$ a $B \in \Pi_1$, pak $A \cap B \leq_{\mathrm{m}} \mathrm{K} \otimes -\mathrm{K}$. K důkazu, že $\mathrm{K} \otimes -\mathrm{K} \leq_{\mathrm{m}} \{\, x\,;\, \mathrm{W}_x = D \,\}$, užijte obecně rekurzívní funkci g, pro kterou platí: $\mathrm{W}_{g(x)} = \emptyset$, když $\mathrm{l}(x) \notin \mathrm{K}$ a $\mathrm{r}(x) \notin \mathrm{K}$, dále $\mathrm{W}_{g(x)} = D$, když $\mathrm{l}(x) \in \mathrm{K}$ a $\mathrm{r}(x) \notin \mathrm{K}$, a konečně $\mathrm{W}_{g(x)} = \mathrm{N}$, když $\mathrm{r}(x) \in \mathrm{K}$.

27. Navrhněte aritmetickou klasifikaci pro následující množiny:

    (a) $\{\, x\,;\, \mathrm{W}_x = \emptyset \,\}$,

    (b) $\{\, x\,;\, \mathrm{W}_x \text{ je konečná} \,\}$,

    (c) $\{\, x\,;\, -\mathrm{W}_x \text{ je konečná} \,\}$,

    (d) $\{\, x\,;\, \mathrm{W}_x \text{ je } \Sigma_1\text{kompletní } \textit{RE} \text{ množina} \,\}$.

28. (Věta o rekurzi) Existuje číslo m, pro které platí $\mathrm{W}_m = \mathrm{N} - \{m\}$? Existuje číslo m splňující podmínku $\mathrm{W}_m = \{\, x\,;\, \neg!\varphi_m(x) \,\}$?

29. Dokažte, že pro každou dvojici obecně rekurzívních funkcí g a h existují čísla a a b taková, že zároveň platí

$$\mathrm{W}_a = \mathrm{W}_{g(a,b)}, \qquad \mathrm{W}_b = \mathrm{W}_{h(a,b)}.$$

    Návod. Použijte dvakrát větu o rekurzi. Nejprve sestavte rovnici pro neznámou funkci. S užitím oné funkce pak sestavte rovnici pro neznámé číslo.

30. Dokažte, že $\mathrm{K} \otimes -\mathrm{K}$ není m-převeditelná na $\mathrm{K} \oplus -\mathrm{K}$.

    Návod. Kdyby ano, z cvičení 24 by plynulo, že $\mathrm{K} \otimes -\mathrm{K}$ je m-převeditelná na svůj komplement. Dále vezměte v úvahu tvrzení z cvičení 26 a Riceovu větu.

31. Dokažte, že průnik dvou prostých množin je opět prostá množina. Sjednocení dvou prostých množin je množina, která je prostá, nebo má konečný doplněk.

Sylabus

Kurs je sestavena zhruba podle kapitol 1–8 a zčásti 11 a 14 knihy [2]. Úvodní část je mnohem podrobnější než v [2] a využívá ostatní zdroje. Některé ze základních pojmů lze vyčíst také z oddílu 2.2 knihy [3] a z její připravované anglické verze.

Reference

[1] P. Odifreddi. *Classical Recursion Theory*. North-Holland, Amsterdam, 1989.

[2] H. Rogers, Jr. *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*. McGraw-Hill, New York, 1967.

[3] V. Švejdar. *Logika: neúplnost, složitost a nutnost*. Academia, Praha, 2002.