Cvičení ke kursu *Klasická logika II*
(12. května 2017)

1. Nechť P a Q jsou unární a R binární predikát. Dokažte, že následující formule jsou logicky platné, ale obrátíme-li (vnější) implikaci, ve všech případech vznikne formule, která logicky platná není:

   $\exists x(P(x) \,\&\, Q(x)) \rightarrow \exists xP(x) \,\&\, \exists xQ(x)$,
   $\forall xP(x) \vee \forall xQ(x) \rightarrow \forall x(P(x) \vee Q(x))$,
   $\exists x\forall yR(x, y) \rightarrow \forall y\exists xR(x, y)$,
   $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\forall xP(x) \rightarrow \forall xQ(x))$,
   $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\exists xP(x) \rightarrow \exists xQ(x))$.

2. Když Δ je množina formulí a φ a ψ jsou formule, pak $\Delta, \psi \models \varphi$, právě když $\Delta \models \psi \rightarrow \varphi$. Dokažte.

3. Teorie T a S jsou *ekvivalentní*, jestliže každý axiom teorie S vyplývá z T a zároveň každý axiom teorie T vyplývá z S. Dokažte, že T a S jsou ekvivalentní, právě když mají stejné modely (tj. každý model teorie T je zároveň modelem teorie S a naopak).

4. Nechť φ je formule v jazyce L_1 a nechť $L_2 \subseteq L_1$ je seznam všech mimologických symbolů vyskytujících se ve φ. Pak φ platí v každé struktuře pro L_1, právě když φ platí v každé struktuře pro L_2. Dokažte.

5. Nechť φ je formule v jazyce L. Uvažujte podmínky (i) existují termy $t_1, .., t_n$ jazyka L takové, že formule $\varphi_x(t_1) \vee \,..\, \vee \varphi_x(t_n)$ je logicky platná, a (ii) formule $\exists x\varphi$ je logicky platná. Zdůvodněte, že z (i) plyne (ii), ale z (ii) neplyne (i).

   Návod. Uvažujte jediný unární predikát P a formuli $P(x) \rightarrow \forall vP(v)$.

6. Tvrzení, že je-li navíc φ otevřená, pak z podmínky (ii) v předchozím cvičení plyne podmínka (i), platí a je známé jako Hilbertova-Ackermannova věta. Zdůvodněte, že v této větě by se nedalo vystačit s jediným termem: je-li φ otevřená formule v jazyce L a formule $\exists x\varphi$ je logicky platná, pak nemusí existovat term t jazyka L takový, že formule $\varphi_x(t)$ je logicky platná.

   Návod. Uvažujte jazyk $\{P, F\}$ s unárním predikátem a unární funkcí, a vezměte formuli $P(x) \vee \neg P(F(x))$.

7. K formuli φ v předchozím cvičení najděte konečnou množinu termů $t_1, .., t_n$ jazyka L takovou, že formule $\varphi_x(t_1) \vee \,..\, \vee \varphi_x(t_n)$ je logicky platná.

8. Nechť T je teorie s jazykem $\{\in\}$ s jediným binárním predikátem a s axiomy
$\forall x \forall y (\forall v (v \in x \equiv v \in y) \to x = y)$,
$\exists x \forall v \neg (v \in x)$,
$\forall x \forall y \exists z \forall v (v \in x \vee v = y \to v \in z)$.

   (a) Dokažte pomocí konečných modelů, že $\forall x (x \notin x)$ a $\neg \exists x \forall v (v \in x)$ jsou sentence nedokazatelné v T.
   (b) Dokažte, že žádný ze tří axiomů teorie T není dokazatelný z ostatních dvou.

9. Dokažte následující sentence v PA.

   (a) Vlastnosti aritmetických operací:

   $\forall x \forall y \forall z ((z + y) + x = z + (y + x))$,
   $\forall x (0 + x = x)$,
   $\forall x \forall y (\mathrm{S}(y) + x = \mathrm{S}(y + x))$,
   $\forall x \forall y (y + x = x + y)$,
   $\forall x (0 \cdot x = 0)$,
   $\forall x \forall y (\mathrm{S}(y) \cdot x = y \cdot x + x)$,
   $\forall x \forall y (y \cdot x = x \cdot y)$,
   $\forall x \forall y \forall z (z \cdot (y + x) = z \cdot y + z \cdot x)$,
   $\forall x \forall y \forall z ((z \cdot y) \cdot x = z \cdot (y \cdot x))$,
   $\forall x (x \neq \mathrm{S}(x))$,
   $\forall x \forall y \forall z (y + x = z + x \to y = z)$,
   $\forall x \forall y (x + y = 0 \to x = 0 \;\&\; y = 0)$,
   $\forall x \forall y (x \cdot y = 0 \to x = 0 \vee y = 0)$,
   $\forall x \forall y \exists u (u + x = y \vee u + y = x)$.

   (b) Vlastnosti relace $<$:

   $\forall x \forall y \forall z (x < y \;\&\; y < z \to x < z)$,
   $\forall x \neg (x < x)$,
   $\forall x \forall y (x < y \vee x = y \vee y < x)$.

   (c) Vztah relací $\leq$ a $<$ k sobě navzájem a k operacím:

   $\forall x \forall y (x \leq y \equiv x < y \vee x = y)$,
   $\forall x \forall y (x < \mathrm{S}(y) \equiv x < y \vee x = y)$,
   $\forall x \forall y \forall z (x < y \to x + z < y + z)$,
   $\forall x \forall y \forall z (x < y \;\&\; z \neq 0 \to x \cdot z < y \cdot z)$.

10. Uvažujte množinu $M = \mathrm{N} \cup \{a, b\}$ vzniklou přidáním dvou nových prvků a a b k množině všech přirozených čísel, a uvažujte dále prodloužení následnické funkce struktury $\mathbb{N}$ definované podmínkami $\mathrm{S}(a) = b$, $\mathrm{S}(b) = a$. Dokažte, že sčítání a násobení struktury $\mathbb{N}$ lze rozšířit na celou množinu M tak, aby ve výsledné struktuře platily všechny axiomy Robinsonovy aritmetiky Q.

11. Rozhodněte, zda následující sentence jsou dokazatelné v Robinsonově aritmetice Q:

    $\forall x (x \leq x)$
    $\forall x (x \leq 0 \to x = 0)$
    $\forall x (0 \leq x)$
    $\forall x (0 \cdot x = 0)$
    $\forall x \forall y (x + y = 0 \to x = 0 \;\&\; y = 0)$
    $\forall x \forall y (x \leq y \equiv \mathrm{S}(x) \leq \mathrm{S}(y))$
    $\forall x \forall y (x < y \to x < \mathrm{S}(y))$
    $\forall x \forall y (\mathrm{S}(x) < y \to x < y)$

$\forall x(x \cdot \overline{1} = x)$

$\forall x \forall y \exists z(x \leq z \ \& \ y \leq z)$

$\forall x \neg(x < x)$

$\forall x \forall y(x \leq y \ \rightarrow \ x < y \ \vee \ x = y)$

$\forall x \forall y(x \cdot y = 0 \ \rightarrow \ x = 0 \ \vee \ y = 0)$

$\forall x(x \leq \overline{1} \ \rightarrow \ x = 0 \ \vee \ x = \overline{1})$

$\forall x \forall y \forall z((z + y) + x = z + (y + x))$.

Návod. NE lze většinou dokázat vhodnou volbou operací v cvičení 10, a lze přitom vystačit s celkem dvěma modely.

12. Dokažte, že struktury $\langle \mathrm{R}, < \rangle$ a $\langle \mathrm{R} - \{0\}, < \rangle$ spolu nejsou izomorfní.

    Návod. V první ze struktur má každá neprázdná shora omezená množina supremum. O druhé to pravda není.

13. V jazyce bez mimologických symbolů (tj. jen s predikátem rovnosti) formulujte bezespornou teorii, která nemá žádné konečné modely. Dokažte pak její úplnost.

14. Uvažujte teorii DO definovanou v knize [6] na straně 212 a dokažte, že formule $\exists y(y < x)$ v ní není ekvivalentní s žádnou otevřenou formulí. Teorie DO tedy nepřipouští eliminaci kvantifikátorů.

    Návod. Využijte fakt, že je-li $\mathcal{A}$ podstruktura struktury $\mathcal{B}$, pak pro libovolnou otevřenou formuli $\varphi(\underline{x})$ a libovolnou k-tici prvků $a_1, .., a_k$ nosné množiny struktury $\mathcal{A}$ platí $\mathcal{A} \models \varphi[\underline{a}] \ \Leftrightarrow \ \mathcal{B} \models \varphi[\underline{a}]$. Jinými slovy, podstruktura libovolné struktury je "elementárně ekvivalentní" podstrukturou vůči otevřeným formulím. Najděte pak model $\mathcal{B}$ teorie DO, jeho podmodel $\mathcal{A}$ a prvek struktury $\mathcal{A}$, který v $\mathcal{B}$ splňuje a v $\mathcal{A}$ nesplňuje (nebo naopak) formuli $\exists y(y < x)$.

15. Najděte sentenci v jazyce obsahujícím pouze symbol $+$, která platí jen v jedné ze struktur $\langle \mathrm{Z}, + \rangle$ a $\langle \mathrm{Q}, + \rangle$.

16. Navrhněte teorii T, jejímž modelem je struktura $\langle \mathrm{R}, +, 0, 1, < \rangle$ a jejíž úplnost lze dokázat pomocí eliminace kvantifikátorů.

    Návod. Postupujte podobně jako v důkazu pro teorii SUCC. Ve formulaci "Lemmatu 1" se obejdete bez literálů, tj. vystačíte s konjunkcí atomických formulí. V "kroku 2" zdůvodněte, že lze předpokládat, že proměnná x se ve formuli vyskytuje pouze v kontextu $n \cdot x + t(\underline{y})$, vždy se stejnými n a t, kde t je term a $n \cdot x$ je zkrácený zápis pro $x + \cdots + x$ obsahující n výskytů proměnné x. Za tento krok vložte jeden dodatečný krok, kterému nic neodpovídá v úvahách o teorii SUCC: lze předpokládat, že proměnná x se ve všech atomických formulích vyskytuje pouze v kontextu "x", tj. nikdy se nevyskytuje ve složeném termu.

17. Dokažte, že je-li teorie T ekvivalentní (ve smyslu cvičení 3) s nějakou konečnou množinou sentencí, pak je ekvivalentní i s vlastní konečnou podmnožinou. Vyvoďte z toho, že teorie z cvičení 13 není konečně axiomatizovatelná. Ani teorie SUCC není konečně axiomatizovatelná.

18. Zdůvodněte, že struktura $\langle \mathrm{N}, 0, \mathrm{s}\rangle + \langle \mathrm{Z}, \mathrm{s}\rangle$ má expanzi pro jazyk $\{0, \mathrm{S}, +\}$ (tj. lze na ní definovat sčítání), která je modelem teorie s axiomy Q1–Q5.

19. Táž struktura ale nemá expanzi, která je modelem teorie $\mathrm{Th}(\langle \mathrm{N}, +, 0, \mathrm{s}\rangle)$.

    Návod. Postupujte podobně jako v úvaze o počtu nestandardních oblastí v nestandardním modelu Peanovy aritmetiky. Sčítání nelze definovat tak, aby ve výsledném modelu platily sentence $\forall x \exists y (x = y + y \ \vee \ x = \mathrm{S}(y + y))$ a $\forall x \forall y \forall z (x + z = y + z \ \rightarrow \ x = y)$.

20. Dokažte, že třída všech dobře uspořádaných množin, chápaná jako třída struktur pro jazyk s jedním binárním predikátem, není axiomatizovatelná.

21. Dokažte, že třída všech souvislých neorientovaných grafů, chápaná rovněž jako třída struktur pro jazyk s jedním binárním predikátem, není axiomatizovatelná.

22. Když třída $\mathcal{C}$ i její komplement $-\mathcal{C}$ (tj. třída všech struktur pro příslušný jazyk, které nejsou v $\mathcal{C}$) jsou axiomatizovatelné, pak každá z nich je dokonce konečně axiomatizovatelná.

23. Je-li T rozhodnutelná teorie, lze vzít posloupnost $\{\, \varphi_i \ ; \ i \in \mathrm{N} \,\}$ všech jejích sentencí, postupně je procházet a pro každou φ_i přidat k T jako nový axiom buď φ_i nebo $\neg\varphi_i$ tak, aby nevznikla sporná teorie. Výsledkem je tvrzení, že každá rozhodnutelná bezesporná teorie má rozhodnutelné zúplnění. Rozmyslete si detaily jeho důkazu a dokažte dále s jeho pomocí, že pro libovolnou teorii T jsou následující podmínky ekvivalentní.
    (i) Každé bezesporné rozšíření teorie T je nerozhodnutelné.
    (ii) Každé rekurzívně axiomatizovatelné rozšíření teorie T je neúplné.
    (iii) Každý model teorie T je nerozhodnutelnou strukturou.

24. Nechť T je teorie, jejíž jazyk $\{0, \mathrm{S}, P\}$ vznikl přidáním unárního predikátu P k jazyku teorie SUCC a jejíž axiomy jsou tytéž jako axiomy teorie SUCC. Je teorie T úplná? Nechť A je rekurzívně spočetná nerekurzívní množina. Uvažujme dvě rozšíření teorie T:

$$S_1 = T \cup \{\, P(\overline{n}) \ ; \ n \in A \,\}$$
$$S_2 = T \cup \{\, P(\overline{n}) \ ; \ n \in A \,\} \cup \{\, \neg P(\overline{n}) \ ; \ n \notin A \,\}.$$

    O každé z teorií S_1 a S_2 rozhodněte, zda

(a) má alespoň dva navzájem neizomorfní nejvýše spočetné modely,
(b) je rozhodnutelná,
(c) je konečně axiomatizovatelná,
(d) je rekurzívně axiomatizovatelná.

Návod k (b). Ověřte a využijte ekvivalenci $n \in A \Leftrightarrow S_1 \vdash P(\overline{n})$.
Návod k (d). Dokažte podobně jako v (b) ekvivalenci $n \in \overline{A} \Leftrightarrow S_2 \vdash \neg P(\overline{n})$. Zdůvodněte, že z toho plyne, že množina $\mathrm{Thm}(S_2)$ není rekurzívně spočetná.

25. Zdůvodněte, že teorie S_1 z cvičení 24 není úplná a že množinu A lze zvolit tak, aby ani S_2 nebyla úplná.

    Návod. Uvažte třeba sentenci $\forall x(P(x) \vee P(\mathrm{S}(x)))$.

26. Dokažte, že každé přirozené číslo je definovatelným prvkem struktury $\langle \mathrm{N}, < \rangle$. Nechť dále R je relace $\{\, [a, b] \,;\, |a - b| = 1 \,\}$. Dokažte, že i ve struktuře $\langle \mathrm{N}, R \rangle$ je každé přirozené číslo definovatelným prvkem.

27. Dokažte, že graf funkce $a \mapsto a + 1$ je ve struktuře $\langle \mathrm{N}, < \rangle$ definovatelnou množinou.

28. Dokažte, že graf funkce $[a, b] \mapsto a+b$ je ve struktuře $\langle \mathrm{N}, 0, \mathrm{s}, \cdot \rangle$ definovatelnou množinou.

    Návod. Ověřte a využijte implikaci $a+b = c \;\Rightarrow\; (1+ac)(1+bc) = 1+c^2(1+ab)$ a domyslete případy, kdy některá z čísel a, b a c jsou nuly.

29. Dokažte, že ve struktuře $\langle \mathrm{N}, +, 0, \mathrm{s}, f \rangle$, kde f je umocňování na druhou (jako funkce jedné proměnné), je graf funkce $[a, b] \mapsto a \cdot b$ definovatelnou množinou.

30. Rozhodněte, zda platí
    (a) Když φ a ψ jsou sentence a $\mathsf{PA} \vdash \varphi \vee \psi$, pak $\mathsf{PA} \vdash \varphi$ nebo $\mathsf{PA} \vdash \psi$.
    (b) Když φ a ψ jsou Σ_1-sentence a $\mathsf{PA} \vdash \varphi \vee \psi$, pak $\mathsf{PA} \vdash \varphi$ nebo $\mathsf{PA} \vdash \psi$.

    Návod k (b). Použijte Σ_1-korektnost na disjunkci $\varphi \vee \psi$ a Σ-úplnost zvlášť na φ a na ψ.

31. Rozhodněte, zda platí
    (a) J-li $\exists x \varphi(x)$ aritmetická sentence taková, že $\mathsf{PA} \vdash \exists x \varphi(x)$, pak existuje číslo n takové, že $\mathsf{PA} \vdash \varphi(\overline{n})$.
    (b) Je-li $\exists x \varphi(x)$ aritmetická sentence taková, že $\varphi \in \Delta_0$ a $\mathsf{PA} \vdash \exists x \varphi(x)$, pak existuje číslo n takové, že $\mathsf{PA} \vdash \varphi(\overline{n})$.

    Návod. V (a) vezměte formuli $\psi(y)$, která splňuje podmínky $\mathbb{N} \models \forall y \psi(y)$ a $\mathsf{PA} \nvdash \forall y \psi(y)$. Její existenci zaručuje První Gödelova věta. Dále uvažujte sentenci $\exists x \forall y(\psi(y) \vee \neg \psi(x))$.

32. Tvrzení, že každé sudé číslo větší než 3 je součtem dvou prvočísel, se nazývá Goldbachova domněnka a není o něm známo, zda je pravdivé. Dokažte, že je-li toto tvrzení nezávislé na PA, pak platí v $\mathbb{N}$.

    Návod. Určete aritmetickou klasifikaci daného tvrzení a použijte Σ-úplnost.

33. Dokažte pomocí Löbových podmínek, že pokud T a τ splňují předpoklady Druhé Gödelovy věty, ν je Gödelova sentence a φ libovolná sentence, pak

$$\begin{aligned}&\mathsf{PA} \vdash \neg\mathrm{Con}(\tau) \to \mathrm{Pr}_\tau(\overline{\varphi}),\\ &\mathsf{PA} \vdash \nu \to \mathrm{Con}(\tau),\\ &\mathsf{PA} \vdash \mathrm{Con}(\tau) \to \neg\mathrm{Pr}_\tau(\overline{\mathrm{Con}(\tau)}).\end{aligned}$$

34. Dokažte za stále týchž předpokladů o T a τ, že sentence $\mathrm{Pr}_\tau(\overline{\varphi}) \to \varphi$ pro některé sentence φ dokazatelná je a pro některé není.

35. *Pravidlo substituce* $A \;/\; A_p(B)$ umožňuje z libovolné výrokové formule A odvodit formuli, která z ní vznikne nahrazením všech výskytů některého atomu toutéž (libovolnou) formulí. Dokažte, že množina všech tautologií je maximální bezesporná množina výrokových formulí, která je uzavřená na pravidlo substituce. Jak rozumíte termínu *bezesporná*?

36. Sestrojte důkazy následujících sekventů ve výrokové variantě kalkulu GK.

$\langle A \vee (A \,\&\, B) \Rightarrow A \rangle$	$\langle A \vee (B \,\&\, \neg B) \Rightarrow A \rangle$
$\langle B \,\&\, \neg B \Rightarrow A \,\&\, B \,\&\, \neg B \rangle$	$\langle A \to B, \neg B \Rightarrow B \to C \rangle$
$\langle A \vee (B \,\&\, C) \Rightarrow (A \vee B) \,\&\, (A \vee C) \rangle$	$\langle A \to B, \neg B \Rightarrow A \to C \rangle$
$\langle (A \vee B) \,\&\, (A \vee C) \Rightarrow A \vee (B \,\&\, C) \rangle$	$\langle \neg(A \to B) \Rightarrow A \rangle$.

37. Navrhněte sekventová pravidla pro spojku $\equiv$ tak, aby pro výsledné rozšíření kalkulu GK platila vlastnost podformulí (subformula property) a věta o úplnosti.

38. Rozhodněte, zda následující sekventy jsou intuicionisticky tautologické. Pokud ano, sestrojte důkaz v kalkulu GJ. Pokud ne, sestrojte kripkovský protipříklad.

$\langle A \vee \neg A \Rightarrow \neg\neg A \to A \rangle$	$\langle \neg\neg\neg\neg B \Rightarrow \neg\neg B \rangle$
$\langle \Rightarrow \neg A \vee \neg B \vee (A \to B) \vee (B \to A) \rangle$	$\langle A \to \neg\neg B, \neg\neg A \Rightarrow \neg\neg B \rangle$
$\langle \neg(A \to B) \Rightarrow \neg B \rangle$	$\langle A \to \neg\neg B, \neg(A \to B) \Rightarrow \neg\neg B \rangle$
$\langle \neg(A \to B) \Rightarrow \neg\neg A \rangle$	$\langle \neg(A \to B), \neg\neg B \Rightarrow \rangle$
$\langle \neg(A \to B) \Rightarrow A \rangle$	$\langle A \to \neg\neg B \Rightarrow \neg\neg(A \to B) \rangle$.
$\langle A \to \neg\neg B, \neg\neg A \Rightarrow \neg\neg\neg\neg B \rangle$	

39. K formuli $((\neg\neg p \to p) \to (p \vee \neg p)) \vee (\neg\neg p \to p)$ sestrojte její intuicionistický kripkovský protipříklad.

40. Je-li ve výrokové variantě kalkulu GK dokazatelný sekvent $\langle\, \Gamma \;\Rightarrow\; \Delta \,\rangle$, pak v GJ je dokazatelný sekvent $\langle\, \Gamma, \neg\Delta \;\Rightarrow\; \rangle$, kde $\neg\Delta$ je množina všech negací formulí z Δ. Toto dokažte indukcí dle počtu kroků v důkazu sekventu $\langle\, \Gamma \;\Rightarrow\; \Delta \,\rangle$. Zvláštní pozornost věnujte pravidlu &r.

41. Vyvoďte z předchozího cvičení, že je-li výroková formula A klasickou tautologií, pak formule $\neg\neg A$ je intuicionistická tautologie.

42. Nazvěme "logikou" libovolnou množinu výrokových formulí, která je uzavřena na pravidlo substituce a na pravidlo MP. Množina všech klasických tautologií i množina všech intuicionistických tautologií je v tomto smyslu logikou, a cvičení 35 říká, že klasická logika je maximální bezespornou logikou. Dokažte navíc s použitím cvičení 41, že je to jediná maximální bezesporná logika, která obsahuje intuicionistickou logiku.

43. Sestrojte důkazy následujících sekventů v kalkulu GJ:
$\langle\, \exists x \forall y \varphi(x,y) \;\Rightarrow\; \forall y \exists x \varphi(x,y) \,\rangle$ $\quad$ $\langle\, \exists x \neg\neg\varphi(x) \;\Rightarrow\; \neg\neg\exists x \varphi(x) \,\rangle$
$\langle\, \forall x \neg\varphi(x) \;\Rightarrow\; \neg\exists x \varphi(x) \,\rangle$ $\quad$ $\langle\, \neg\neg\forall x \varphi(x) \;\Rightarrow\; \forall x \neg\neg\varphi(x) \,\rangle$
$\langle\, \exists x \neg\varphi(x) \;\Rightarrow\; \neg\forall x \varphi(x) \,\rangle$ $\quad$ $\langle\, \neg\forall x \neg\varphi(x) \;\Rightarrow\; \neg\neg\exists x \varphi(x) \,\rangle$.
$\langle\, \neg\exists x \varphi(x) \;\Rightarrow\; \forall x \neg\varphi(x) \,\rangle$

44. Sestrojte důkazy následujících sekventů v kalkulu GK:
$\langle\, \neg\forall x \varphi(x) \;\Rightarrow\; \exists x \neg\varphi(x) \,\rangle$
$\langle\, \forall x \varphi(x) \to \psi \;\Rightarrow\; \exists x(\varphi(x) \to \psi) \,\rangle$ $\quad$ (x není volně ve ψ)
$\langle\, \forall x(\psi \vee \varphi(x)) \;\Rightarrow\; \psi \vee \forall x \varphi(x) \,\rangle$ $\quad$ (x není volně ve ψ).

Reference

[1] P. Hájek a P. Pudlák. *Metamathematics of First Order Arithmetic*. Springer, 1993.

[2] P. Odifreddi. *Classical Recursion Theory*. North-Holland, Amsterdam, 1989.

[3] H. Schwichtenberg. Proof theory. V J. Barwise, editor, *Handbook of Mathematical Logic*, kapitola D.2, str. 867–896. North-Holland, 1977.

[4] C. Smoryński. The incompleteness theorems. V J. Barwise, editor, *Handbook of Mathematical Logic*, kapitola D.1, str. 819–843. North-Holland, 1977.

[5] C. Smoryński. Hilbert's programme. *CWI Quarterly*, 1(4), 1988.

[6] V. Švejdar. *Logika: neúplnost, složitost a nutnost*. Academia, Praha, 2002.

[7] A. Tarski, A. Mostowski a R. M. Robinson. *Undecidable Theories*. North-Holland, Amsterdam, 1953.