Fragmenty Peanovy aritmetiky

Zpracováno podle článku [1] autorů J.B. Paris a L. A. S. Kirby a podle poznámek a knihy [2] Vítězslava Švejdara.

Jedná se o překlad doplněný o detailní důkazy, popř. komentáře.

Překlad atd.: Katrin Přikrylová

1 Úvod

Peanova aritmetika využívá na rozdíl od Robinsonovy princip indukce. Jedná se tedy o poměrně silnou teorii. Ne vždy je ale taková potřeba. Leckdy by nám stačilo pracovat s něčím slabším – nicméně Robinsonova už je příliš slabá. Zavedeme si tedy jen určitý fragment Peanovy aritmetiky, který místo principu indukce využívá pouze jakousi oslabenou verzi – a to indukci definovanou jen pro formule z určité úrovně Σ/Π hierarchie (nazvěme ji jako *omezenou indukci*). Nejslabší verzí je samozřejmě případ, kdy uvažujeme už indukci pouze pro omezené formule (Δ_0). V této teorii je například stále otevřeným problémem, zda v ní lze dokázat, že existuje nekonečně mnoho prvočísel, či zda je tato teorie konečně axiomatizovatelná.

Základním stavebním kamenem naší teorie budou tzv. Σ_n-kolekce.

Na začátek si připomeňme a zaveďme několik definic:

2 Definice

Budeme pracovat v jazyce prvořádové logiky s následnickou funkcí S, uspořádáním $<$ a binárními operacemi $+, \cdot$ (sčítání, násobení).

Definice 2.1 (Δ_0) Δ_0 *(množina omezených formulí) je množina takových formulí, které obsahují nejvýše omezené kvantifikátory ($\forall x{<}z\,\varphi(x)$, $\exists x{<}z\,\varphi(x)$,* *popř. s $\leq$ / $\geq$)*

Definice 2.2 (Σ_n) *Σ_n ($n \geq 0$) je množina formulí tvaru $\exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 ... x_n \varphi$, kde $\varphi \in \Delta_0$*

Definice 2.3 ($\mathrm{B}\Sigma_n$ **(Σ_n-kolekce))** *$\mathrm{B}\Sigma_n$ je univerzální uzávěr formule:*

$$\forall x{<}y \, \exists z \varphi(x,z) \;\rightarrow\; \exists t \forall x{<}y \, \exists z{<}t \, \varphi(x,z)$$

a to pro všechny $\varphi \in \Sigma_n$.

Definice 2.4 ($\mathrm{I}\Sigma_n$ **(Σ_n-indukce))** *$\mathrm{I}\Sigma_n$ je univerzální uzávěr formule:*

$$\varphi(0) \;\&\; \forall x(\varphi(x) \;\rightarrow\; \varphi(\mathrm{S}(x))) \;\rightarrow\; \forall \varphi(x))$$

a to pro všechny $\varphi \in \Sigma_n$.

Definice 2.5 ($\mathrm{L}\Sigma_n$ **(Princip Σ_n-nejmenšího prvku))** *$\mathrm{L}\Sigma_n$ je univerzální uzávěr formule:*

$$\exists x \varphi(x) \;\rightarrow\; \exists x(\varphi(x) \;\&\; \forall y{<}x \, \neg\varphi(y)$$

a to pro všechny $\varphi \in \Sigma_n$.

Obdobně můžeme definovat také Π_n, $\mathrm{B}\Pi_n$, $\mathrm{I}\Pi_n$ a $\mathrm{L}\Pi_n$.

Nadále budeme pracovat v systému, který se skládá z Robinsonovy aritmetiky a nějakého přidaného axiomu (schématu).

3 Vztah mezi $\mathrm{I}\Sigma_n, \mathrm{B}\Sigma_n, \mathrm{L}\Sigma_n$, $\mathrm{I}\Pi_n, \mathrm{B}\Pi_n, \mathrm{L}\Pi_n$

Zajímavé na našem fragmentu Peanovy aritmetiky je to, jak spolu souvisejí definované principy. Dokážeme si v $\mathsf{Q} + \mathrm{I}\Delta_0$ následující vztahy:

$\mathrm{I}\Sigma_{n+1}$

$\Downarrow$

$\mathrm{B}\Sigma_{n+1} \Leftrightarrow \mathrm{B}\Pi_n$

$\Downarrow$

$\mathrm{I}\Sigma_n \Leftrightarrow \mathrm{I}\Pi_n \Leftrightarrow \mathrm{L}\Sigma_n \Leftrightarrow \mathrm{L}\Pi_n$

Dokažme si nejdříve dvě pomocná lemmata:

Lemma 3.1 (Lemma A) *Je-li $\gamma \in \Sigma_n$, pak $\forall x{<}y\,\gamma$ je v $\mathrm{B}\Sigma_n$ ekvivalentní nějaké Σ_n formuli. (Tj. omezené kvantifikátory nezvyšují úroveň formule.)*

Důkaz: Indukcí podle n:

1) $n = 0$: $\Sigma_0 = \Pi_0 = \Delta_0$, tedy φ je omezená a z definice Δ_0 můžeme přidat omezený kvantifikátor(y) a formule bude stále omezená.

2) $n > 0$: Předpokládejme, že to platí pro $n-1$ a nechť ψ je formule $\exists z\varphi(x, y, z)$, kde $\varphi \in \Pi_{n-1}$. Pak platí:

$$\mathrm{B}\Sigma_n \vdash \forall x{<}y\,\psi \leftrightarrow \exists t\forall x{<}y\,\exists z{<}t\,\varphi$$

Implikace zleva doprava platí z definice $\mathrm{B}\Sigma_n$.

Implikace zprava doleva: triviální, pokud existuje $z < t$, pro které platí φ, pak je to tentýž svědek pro $\exists z\varphi$.

Z indukčního předpokladu $\forall x{<}y\,\exists z{<}t\,\varphi$ je ekvivalentní nějaké Π_{n-1} formuli, tedy $\exists t\forall x{<}y\,\exists z{<}t\,\varphi$ je Σ_n formule, tedy i $\forall x{<}y\,\psi$ je Σ_n formule.

□

Lemma 3.2 (Lemma B) *Formule ze Σ_{n+1} jsou v $\mathrm{B}\Sigma_n$ uzavřeny na existenční kvantifikátor a na disjunkci a konjunkci. (Tj. přidáním existenčního kvantifikátoru před Σ_{n+1} formuli, popř. spojením dvou Σ_{n+1} formulí pomocí disjunkce/konjunkce, se její úroveň nezvýší). Obdobně jsou formule z Π_{n+1} uzavřeny na obecný kvantifikátor a disjunkci a konjunkci.*

Důkaz: Indukcí dle n:

1) (Pro disjunkci, konjunkci) $n = 0$: Platí z definice Δ_0.

2) $n \geq 1$: Nechť jsou z indukčního předpokladu formule z Σ_{n-1} a Π_{n-1} uzavřeny na existenční (popř. obecný) kvantifikátor a na disjunkci a konjunkci. Nechť ψ je formule tvaru $\exists x_1\exists x_2\varphi(x_1, x_2, y)$, kde $\varphi \in \Pi_{n-1}$ (povšimněme si, že $\exists x_2\varphi(x_1, x_2, y)$ je Σ_n formule). Ukážeme, že $\psi \in \Sigma_n$. K tomu využijeme párovací funkci, která nám zakóduje $w = (x_1, x_2)$. Formuli tedy přepíšeme následovně:

$$\exists w\exists x_1 \leq w\exists x_2 \leq w(w = (x_1, x_2)\ \&\ \varphi(x_1, x_2, y))$$

Víme, že Π_{n-1} je uzavřena na konjunkci i omezenou kvantifikaci. Formule výše je tedy Σ_n.

Pro konjunkci a disjunkci: nechť $\exists v\varphi(x,v)$ a $\exists v\psi(x,v)$ jsou Σ_n formule, tedy φ a ψ jsou Π_{n-1} formule (popř. speciálně Δ_0 formule pro $n=1$). Pak konjunkci $\exists v\varphi(x,v)$ & $\exists v\psi(x,v)$ můžeme ekvivalentně zapsat jako $\exists v_1\exists v_2(\varphi(x,v_1)$ & $\psi(x,v_2))$. A jak jsme dokázali výše, Σ_n formule jsou uzavřeny na existenční kvantifikátor.Pro formule z Π_n to dokážeme obdobně.

Poznámka: Na přednášce byl ukázán důkaz s předpokladem $\mathrm{B}\Pi_n$. Díky tomu jsme také indukci začínali o úroveň výše.

□

Tvrzení 3.3 $\mathrm{I}\Delta_0 \vdash \mathrm{B}\Sigma_{n+1} \Leftrightarrow \mathrm{B}\Pi_n$

Důkaz:

$\Leftarrow$: Triviální - je-li $\varphi \in \Pi_n$, pak také $\varphi \in \Sigma_{n+1}$ (můžeme přidat jalovou proměnnou).

$\Rightarrow$: Σ_{n+1}-kolekce je množina formulí tvaru

$$\forall x{<}y\,\exists z\varphi(x,z) \;\rightarrow\; \exists t\forall x{<}y\,\exists z{<}t\,\varphi(x,z)$$

kde φ je Σ_{n+1} formule, nechť je to $\varphi(x,z) = \exists w\psi(x,z,w)$, kde $\psi \in \Pi_n$. Definici Σ_{n+1}-kolekce tedy můžeme přepsat takto:

$$\forall x{<}y\,\exists z\exists w\psi(x,z,w) \;\rightarrow\; \exists t\forall x{<}y\,\exists z{<}t\,\exists w\psi(x,z,w)$$

Z lemmatu B víme, že sousední kvantifikátory stejného typu můžeme „sloučit“ do jednoho pomocí párovací funkce. Nechť tedy $u=(z,w)$, čímž dostáváme:

$$\forall x{<}y\,\exists u\psi(x,u) \;\rightarrow\; \exists t\forall x{<}y\,\exists u{<}t\,\psi(x,u)$$

A to už je chtěná definice Π_n-kolekce.

□

Tvrzení 3.4 $\mathrm{I}\Delta_0 \vdash \mathrm{I}\Sigma_n \Leftrightarrow \mathrm{I}\Pi_n$

Důkaz: (Ukážeme pouze jeden směr ($\Leftarrow$), druhý se dokáže analogicky.) Důkaz provedeme obměnou (tj. dokazujeme $\neg\mathrm{I}\Sigma_n \Rightarrow \neg\mathrm{I}\Pi_n$). Nechť tedy platí $\varphi(0)$ & $\forall x(\varphi(x) \rightarrow \varphi(\mathrm{S}(x))$ a současně $\neg\varphi(a)$. Ukážeme, že indukce selže také pro $\forall w(w=a-y \rightarrow \neg\varphi(w))$ (popř. pro $\exists w(w=a-y$ & $\neg\varphi(w))$ pro druhý směr).

Chceme tedy dokázat formuli:

$$\forall w(w = a - 0 \rightarrow \neg\varphi(w)) \ \&$$

$$\& \ \forall y(\forall w(w = a - y \rightarrow \neg\varphi(w)) \rightarrow \forall w(w = a - \mathrm{S}(y) \rightarrow \neg\varphi(w))) \ \&$$

$$\& \ \exists y(w = a - y \ \& \ \varphi(w))$$

První část konjunkce platí, neboť do $\varphi(w)$ zasubstituujeme a. Dostáváme tedy formuli: $\forall w(w = a \rightarrow \neg\varphi(a))$, kde konsekvent platí z našeho předpokladu.

Druhá část konjunkce $\forall y(\forall w(w = a - y \rightarrow \neg\varphi(w)) \rightarrow \forall w(w = a - \mathrm{S}(y) \rightarrow \neg\varphi(w)))$: Využijeme předpoklad $\forall(x)\varphi(x) \rightarrow \varphi(\mathrm{S}(x))$, který si můžeme přepsat jako $\forall(x)(\neg\varphi(\mathrm{S}(x)) \rightarrow \neg\varphi(x))$. Dále si povšimněme, že w v antecedentu je následník w v konsekventu. (Uvědomme si, že i když se přes w kvantifikuje univerzálním kvantifikátorem, zajímá nás ve skutečnosti pouze případ, kdy se w skutečně rovná výrazu $a - y$, jinak obě implikace triviálně platí.) A v takovém případě, jestliže platí závěr antecedentu, musí platit (právě díky $\forall(x)'\neg\varphi(\mathrm{S}(x)) \rightarrow \neg\varphi(x)))$ také závěr konsekventu. Tedy i druhá část konjunkce je platná.

Třetí část konjunkce $\exists y(w = a - y \ \& \ \varphi(w))$: Zvolme $y = a$, pak $\varphi(0)$ platí z předpokladu.

□

Tvrzení 3.5 *Pro* $n \geq 1$*:* $\mathrm{I}\Delta_0 \vdash \mathrm{I}\Sigma_n \Rightarrow \mathrm{B}\Sigma_n$

Důkaz: Nechť $\mathrm{I}\Sigma_n$ platí a předpokládejme $\forall x{<}a\exists z\varphi$, kde $\varphi \in \Pi_{n-1}$ (tj. antecedent z $\mathrm{B}\Sigma_n$). Označme $\psi = a < u \vee \exists t\forall x{<}u\exists z{<}t\varphi$. Tvrdíme, že ψ je ekvivalentní nějaké Σ_n formuli.

Indukcí podle n:

1) $n = 1$: Triviální, neboť $\varphi \in \Delta_0$ a ψ tak byla sestavena pouze za použití disjunkce, omezené kvantifikace (viz lemma A), Δ_0 formulí a jednoho existenčního kvantifikátoru, jedná se tedy o Σ_1 formuli.

2) $n > 1$: Z lemmatu A víme, že pokud je $\varphi \in \Pi_{n-1}$, tak také $(\forall x{<}u\exists z{<}t\varphi) \in \Pi_{n-1}$. Tedy ψ je Σ_n formule.

Protože je tedy ψ ekvivalentní Σ_n formuli, můžeme na ni aplikovat Σ_n indukci:

Pro $n = 0$: $a < 0 \vee \exists t\forall x < 0\exists z{<}t\varphi$ platí triviálně.

Pro n $>$ 0: Nechť $a < u \vee \exists t \forall x < u \exists z{<}t\, \varphi$ platí. Chceme dokázat $a < \mathrm{S}(u) \vee \exists t \forall x < \mathrm{S}(u) \exists z{<}t\, \varphi$. Je-li $a < u$, pak také $a < \mathrm{S}(u)$. Zajímá nás tedy situace, kdy $\mathrm{S}(u) \leq a$. Potřebujeme, aby existovalo t, které nám stanoví mez i pro tento případ. Zvolme tedy za tuto novou mez maximum z původního t a ze z, které jsme získali z předpokladu $\forall x{<}a\, \exists z \varphi$.

Formule ψ tedy platí univerzálně, tedy i platí i $\psi(a)$, a proto po dosazení platí $\exists t \forall x{<}a\, \exists z{<}t\, \varphi$. Získali jsme tedy $\mathrm{B}\Pi_{n-1}$ a z tvrzení 3.3 dostáváme požadované $\mathrm{B}\Sigma_n$.

□

Tvrzení 3.6 $\mathrm{I}\Delta_0 \vdash \mathrm{B}\Sigma_{n+1} \Rightarrow \mathrm{I}\Sigma_n$

Důkaz: Indukcí podle n:

1) $n = 0$: Triviální, neboť $\mathrm{I}\Sigma_0 = \mathrm{I}\Delta_0$ je v množině předpokladů.

2) $n > 0$: Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n - 1$. Nechť $\exists u \varphi(u, 0)$ & $\neg\exists u \varphi(u, a)$, kde $\varphi \in \Pi_{n-1}$.

Využijeme fakt, že $\mathrm{I}\Sigma_0$ můžeme ekvivalentně zapsat jako: $\varphi(0)$ & $\exists x \neg\varphi(x) \rightarrow \exists x \neg(\varphi(x) \rightarrow \varphi(\mathrm{S}(x)))$. Chceme tedy dokázat $\exists x \neg(\varphi(x) \rightarrow \varphi(\mathrm{S}(x)))$, což si můžeme pro přehlednost zapsat jako $\exists x(\varphi(x)$ & $\neg\varphi(\mathrm{S}(x)))$.

Chceme uplatnit schéma $\mathrm{B}\Sigma_{n+1}$ na formuli $\exists u \varphi(u, 0)$ & $\neg\exists u \varphi(u, a)$, což není vzhledem k jejímu tvaru možné. Definujeme si tedy pomocnou formuli $\forall x{<}a\, \exists u(\varphi(u, 0) \vee (u = 0$ & $\neg\exists v \varphi(v, x)))$. Na tuto formuli aplikujeme $\mathrm{B}\Sigma_{n+1}$, čímž dostaneme: $\forall x{<}a\, \exists u(\varphi(u, x) \leftrightarrow \exists u{<}t\, \varphi(u, x)$. Z lemmatu A je $\exists u{<}t\, \varphi(u, x)$ & $x < a$ ekvivalentní nějaké Π_{n-1} formuli. Nyní užijeme indukční předpoklad (máme $\mathrm{I}\Pi_{n-1}$). A protože můžeme ignorovat t (dává nám pouze silnější podmínku), dostáváme $\exists x{<}a\, (\exists u \varphi(u, x)$ & $\neg\varphi(u, \mathrm{S}(x)))$.

□

Tvrzení 3.7 *Pro $n \geq 1$ existuje model takový, že platí $K \models \mathrm{I}\Sigma_n$, který není modelem $\mathrm{B}\Sigma_{n+1}$.*

Důkaz:

Nechť $M \models$ PA obsahuje nestandardní Σ_1-definovatelný prvek. Definujme si: $K = \{x \in M | x$ je Σ_{n+1}-definovatelné v $M\}$.

Nejdříve poznamenejme, že K je vůči Σ_n formulím podstruktura M:

1) Je uzavřená na sčítání i násobení: Mějme prvky $a, b \in K$, tedy jsou Σ_{n+1}-definovatelné v M. Chceme, aby, i jejich součet/součin byl v K, tedy aby byl definovatelný v M. Zvolíme takovouto formuli $\exists y, z(x = y + z \ \& \ \varphi_1(y) \ \& \ \varphi_2(z))$ pro součet a pro součin $\exists y, z(x = y \cdot z \ \& \ \varphi_1(y) \ \& \ \varphi_2(z))$, kde formule $\varphi_{1,2}$ definuje prvky a, b v M.

2) Z teorie modelů víme, že stačí použít -Vaughtův test pro zjištění, zda je nějaké struktura podstrukturou jiné. My zde nyní použijeme jeho oslabenou variantu: omezíme se pouze na Σ_{n+1} formule. Potřebujeme ukázat, že platí-li formule $\exists \varphi(p)$ v M pro parametry z K a $\varphi \in \Pi_n$, existuje takový prvek $a \in K$, že $\varphi(a, p)$ platí. Potřebujeme tedy takový prvek definovat v M. Zvolme formuli: $\exists p_0, ..., p_k(\varphi(x, p_0, ..., p_k) \ \& \ \forall y{<}x \neg\varphi(x, p_0, ..., p_k) \ \& \ \lambda_0(p_0) \ \& \ ... \ \& \ \lambda_k(p_k))$, kde λ_n definuje příslušný parametr p v M.

Pro $\varphi \in \Sigma_{n+1}$ tedy platí $M \models \varphi \Leftrightarrow K \models \varphi$. Formule složitosti Σ_{n+2}, které jsou platné v K jsou zřejmě platné v M a formule složitosti Π_{n+2}, které jsou platné v M, jsou platné triviálně i v K. Poznamenejme, že složitost formule ve schématu minimálního prvku $\mathrm{L}\Sigma_n$ je Π_{n+2} - jedná se o univerzální uzávěr přes parametry (a úroveň zvyšuje také negace v konsekventu). Platí tedy $K \models \mathrm{L}\Sigma_n$ A protože je princip nejmenšího prvku ekvivalentí indukci na dané Σ/Π úrovni, máme $K \models \mathrm{I}\Sigma_n$.

Nyní ukážeme, že v K neplatí $\mathrm{B}\Sigma_{n+1}$. Nechť $\exists w \gamma(e, w, x)$ je univerzální Σ_{n+1} formule platná v M, kde $\gamma \in \Pi_n$. Nechť $t \in K$ je nestandardní prvek. Pak pro $a \in K$ platí:

$$M \models \exists e{<}t \, \exists u(\gamma(e, u_0, u_1) \ \& \ u_1 = a \ \& \ \forall z{<}u \neg\gamma(e, z_0, z_1))$$

kde $u = (u_0, u_1)$ je standardní párovací funkce. Označme si jako $\lambda(e, u, a) = \gamma(e, u_0, u_1) \ \& \ u_1 = a \ \& \ \forall z{<}u \neg\gamma(e, z_0, z_1)$. Tedy $M \models \exists e{<}t \, \exists u \lambda(e, u, a)$.

Proto $K \models \exists e{<}t \, \exists u \lambda(e, u, a)$, a tedy $K \models \forall a{<}\mathrm{S}(t) \, \exists e{<}t \, \exists u \lambda(e, u, a)$.

Pro spor nyní předpokládejme, že $K \models \mathrm{B}\Sigma_{n+1}$. Z tvrzení dříve tedy víme, že formule
$balta \mathrm{S}(t) \exists e{<}t \, \exists u \lambda(e, u, a)$ je ekvivalentní nějaké Σ_{n+1} formuli v K i v M. Proto $M \models \forall a{<}\mathrm{S}(t) \, \exists e{<}t \, \exists u \lambda(e, u, a)$.

Použijeme-li Dirichletův princip (pigeon hole principle), zjistíme, že v M jsou dvě různá u, r ($u_0 < r_0 < \mathrm{S}(t)$ a $e < t$) taková, že $M \models \lambda(e, u, u_0) \ \& \ \lambda(e, r, r_0)$. Což je ovšem spor s tím, že se jedná o nejmenší takové. (Toto lze lehce nahlédnout – hrubě řečeno máme o jedno a více než e, ovšem každé a má být v kombinaci s nějakým e nejmenší takové, že pro něj platí daná formule.)

$\square$

Reference

[1] PARIS, J. B. a L. A. S KIRBY. Σ_n-Collection Schemas in Aritmetic. Logic Colloqium '77. 1978.

[2] ŠVEJDAR, Vítězslav. <i>Logika: neúplnost, složitost a nutnost</i>. Vyd. 1. Praha: Academia, 2002, 464 s. ISBN 802001005x.