

B

Odpovídejte *ve větách* (!) a tak, aby byl *vysvětlen postup* řešení. Odpovědi pište přímo na tento papír (po obou stranách), až v případě nedostatku místa a pro pomocné výpočty použijte vlastní papír. Nezapomeňte na podpis!

U pojmů zvýrazněných *kurzívou* dejte vhodným způsobem najevo, že znáte definici.

1. Rozhodněte, zda množina $\Delta = \{\neg p_0 \equiv p_2, \neg p_1 \equiv p_3, \neg p_2 \equiv p_4, \dots\}$ výrokových formulí je splnitelná. Pokud ano, charakterizujte všechna pravdivostní ohodnocení, která ji splňují. Rozhodněte, zda existuje formule A neobsahující jiné atomy než $\{p_0, p_1, p_2, \dots\}$ taková, že A ani $\neg A$ nevyplývá z (není *tautologickým důsledkem* množiny) Δ .

2. Nechť P a Q jsou unární, R binární predikátový symbol. Rozhodněte, které z následujících formulí jsou *logicky platnými formulemi*:

$$\forall x \exists y P(x) \rightarrow \exists y \forall x P(x)$$

$$\forall x \exists y R(x, y) \rightarrow \exists y \forall x R(x, y)$$

$$\forall x \exists y (R(x, y) \ \& \ Q(y)) \rightarrow \forall x Q(x)$$

$$\forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow \neg R(y, x)) \rightarrow \forall x \neg R(x, x).$$

3. Vyberte si jednu formuli z předchozího cvičení a zdůvodněte o ní, že je v predikátovém kalkulu *dokazatelná*. Přitom můžete využít větu o úplnosti výrokového kalkulu a známá pomocná tvrzení o predikátovém kalkulu, ale nikoliv větu o (jeho) úplnosti. U pomocných tvrzení dejte najevo, že jste ověřil(a) předpoklady. Použijete-li případně pomocné tvrzení, o kterém se nemluvilo na cvičení, připomeňte mi i znění.

4. Uvažujte jazyk $\{0, S\}$ s konstantou a unárním funkčním symbolem. Rozhodněte, zda z množiny $\Delta = \{\forall x \forall y (S(x) = S(y) \rightarrow x = y), \forall x (S(x) \neq 0)\}$ vyplývá sentence $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \exists y (y \neq x_1 \ \& \ y \neq x_2 \ \& \ y \neq x_3)$.