

Výuka logiky bez logických pojmů

Vítězslav Švejdar

Katedra logiky, FF UK Praha, <http://www.cuni.cz/~svejdar/>

Seminář Organon VII, Olomouc, září 2010

Outline

Úvodní kursy logiky na různých fakultách

Příklady důkazů v aritmetice

Co se v logice dá považovat za podstatné?

Úvodní kursy logiky na různých fakultách

Úskalí na humanitních fakultách

Úvodní kursy logiky na různých fakultách

Úskalí na humanitních fakultách

- ▶ tabulková metoda a pravdivostní tabulky by neměly být to jediné, co si student z kursu odnese,

Úvodní kursy logiky na různých fakultách

Úskalí na humanitních fakultách

- ▶ tabulková metoda a pravdivostní tabulky by neměly být to jediné, co si student z kursu odnese,
- ▶ pojmy jako korektnost, úplnost, nerozhodnutelnost mohou být příliš náročné.

Úvodní kursy logiky na různých fakultách

Úskalí na humanitních fakultách

- ▶ tabulková metoda a pravdivostní tabulky by neměly být to jediné, co si student z kursu odnese,
- ▶ pojmy jako korektnost, úplnost, nerozhodnutelnost mohou být příliš náročné.

Úskalí na matematických fakultách

Úvodní kursy logiky na různých fakultách

Úskalí na humanitních fakultách

- ▶ tabulková metoda a pravdivostní tabulky by neměly být to jediné, co si student z kursu odnese,
- ▶ pojmy jako korektnost, úplnost, nerozhodnutelnost mohou být příliš náročné.

Úskalí na matematických fakultách

- ▶ student by si neměl odnést, že logika je hygienou matematiky.

Proč se $(-1) \cdot (-1)$ rovná 1?

Proč se $(-1) \cdot (-1)$ rovná 1?

1. Číslo y je **opačné** k x , jestliže $y + x = 0$.

Proč se $(-1) \cdot (-1)$ rovná 1?

1. Číslo y je **opačné** k x , jestliže $y + x = 0$.
2. Číslo opačné k číslu x je určeno jednoznačně. Jsme tedy oprávněni je značit $-x$.

Proč se $(-1) \cdot (-1)$ rovná 1?

1. Číslo y je **opačné** k x , jestliže $y + x = 0$.
2. Číslo opačné k číslu x je určeno jednoznačně. Jsme tedy oprávněni je značit $-x$.
Nechť $y_1 + x = 0$, a také $y_2 + x = 0$. Pak

Proč se $(-1) \cdot (-1)$ rovná 1?

1. Číslo y je **opačné** k x , jestliže $y + x = 0$.
2. Číslo opačné k číslu x je určeno jednoznačně. Jsme tedy oprávněni je značit $-x$.

Nechť $y_1 + x = 0$, a také $y_2 + x = 0$. Pak

$$y_1 = 0 + y_1 =$$

Proč se $(-1) \cdot (-1)$ rovná 1?

1. Číslo y je **opačné** k x , jestliže $y + x = 0$.
2. Číslo opačné k číslu x je určeno jednoznačně. Jsme tedy oprávněni je značit $-x$.

Nechť $y_1 + x = 0$, a také $y_2 + x = 0$. Pak

$$y_1 = 0 + y_1 = y_2 + x + y_1 =$$

Proč se $(-1) \cdot (-1)$ rovná 1?

1. Číslo y je **opačné** k x , jestliže $y + x = 0$.
2. Číslo opačné k číslu x je určeno jednoznačně. Jsme tedy oprávněni je značit $-x$.

Nechť $y_1 + x = 0$, a také $y_2 + x = 0$. Pak

$$y_1 = 0 + y_1 = y_2 + x + y_1 = y_2 + 0 = y_2.$$

Proč se $(-1) \cdot (-1)$ rovná 1?

1. Číslo y je **opačné** k x , jestliže $y + x = 0$.
2. Číslo opačné k číslu x je určeno jednoznačně. Jsme tedy oprávněni je značit $-x$.
Nechť $y_1 + x = 0$, a také $y_2 + x = 0$. Pak
 $y_1 = 0 + y_1 = y_2 + x + y_1 = y_2 + 0 = y_2$.
3. Pro libovolné x platí $(-1) \cdot x = -x$.

Proč se $(-1) \cdot (-1)$ rovná 1?

1. Číslo y je **opačné** k x , jestliže $y + x = 0$.
2. Číslo opačné k číslu x je určeno jednoznačně. Jsme tedy oprávněni je značit $-x$.

Nechť $y_1 + x = 0$, a také $y_2 + x = 0$. Pak

$$y_1 = 0 + y_1 = y_2 + x + y_1 = y_2 + 0 = y_2.$$

3. Pro libovolné x platí $(-1) \cdot x = -x$.
Musíme ověřit, že $(-1) \cdot x + x = 0$:

Proč se $(-1) \cdot (-1)$ rovná 1?

1. Číslo y je **opačné** k x , jestliže $y + x = 0$.
2. Číslo opačné k číslu x je určeno jednoznačně. Jsme tedy oprávněni je značit $-x$.

Nechť $y_1 + x = 0$, a také $y_2 + x = 0$. Pak

$$y_1 = 0 + y_1 = y_2 + x + y_1 = y_2 + 0 = y_2.$$

3. Pro libovolné x platí $(-1) \cdot x = -x$.

Musíme ověřit, že $(-1) \cdot x + x = 0$:

$$(-1) \cdot x + x = (-1) \cdot x + 1 \cdot x =$$

Proč se $(-1) \cdot (-1)$ rovná 1?

1. Číslo y je **opačné** k x , jestliže $y + x = 0$.
2. Číslo opačné k číslu x je určeno jednoznačně. Jsme tedy oprávněni je značit $-x$.

Nechť $y_1 + x = 0$, a také $y_2 + x = 0$. Pak

$$y_1 = 0 + y_1 = y_2 + x + y_1 = y_2 + 0 = y_2.$$

3. Pro libovolné x platí $(-1) \cdot x = -x$.

Musíme ověřit, že $(-1) \cdot x + x = 0$:

$$(-1) \cdot x + x = (-1) \cdot x + 1 \cdot x = ((-1) + 1) \cdot x =$$

Proč se $(-1) \cdot (-1)$ rovná 1?

1. Číslo y je **opačné** k x , jestliže $y + x = 0$.
2. Číslo opačné k číslu x je určeno jednoznačně. Jsme tedy oprávněni je značit $-x$.

Nechť $y_1 + x = 0$, a také $y_2 + x = 0$. Pak

$$y_1 = 0 + y_1 = y_2 + x + y_1 = y_2 + 0 = y_2.$$

3. Pro libovolné x platí $(-1) \cdot x = -x$.

Musíme ověřit, že $(-1) \cdot x + x = 0$:

$$(-1) \cdot x + x = (-1) \cdot x + 1 \cdot x = ((-1) + 1) \cdot x = 0 \cdot x = 0.$$

Proč se $(-1) \cdot (-1)$ rovná 1?

1. Číslo y je **opačné** k x , jestliže $y + x = 0$.
2. Číslo opačné k číslu x je určeno jednoznačně. Jsme tedy oprávněni je značit $-x$.
Nechť $y_1 + x = 0$, a také $y_2 + x = 0$. Pak
$$y_1 = 0 + y_1 = y_2 + x + y_1 = y_2 + 0 = y_2.$$
3. Pro libovolné x platí $(-1) \cdot x = -x$.
Musíme ověřit, že $(-1) \cdot x + x = 0$:
$$(-1) \cdot x + x = (-1) \cdot x + 1 \cdot x = ((-1) + 1) \cdot x = 0 \cdot x = 0.$$
4. Bylo použito tvrzení, že $0 \cdot x$ je vždy 0.

Proč se $(-1) \cdot (-1)$ rovná 1?

1. Číslo y je **opačné** k x , jestliže $y + x = 0$.
2. Číslo opačné k číslu x je určeno jednoznačně. Jsme tedy oprávněni je značit $-x$.

Nechť $y_1 + x = 0$, a také $y_2 + x = 0$. Pak

$$y_1 = 0 + y_1 = y_2 + x + y_1 = y_2 + 0 = y_2.$$

3. Pro libovolné x platí $(-1) \cdot x = -x$.

Musíme ověřit, že $(-1) \cdot x + x = 0$:

$$(-1) \cdot x + x = (-1) \cdot x + 1 \cdot x = ((-1) + 1) \cdot x = 0 \cdot x = 0.$$

4. Bylo použito tvrzení, že $0 \cdot x$ je vždy 0.

$$\text{Platí } 0 + 0 \cdot x = 0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x.$$

Proč se $(-1) \cdot (-1)$ rovná 1?

1. Číslo y je **opačné** k x , jestliže $y + x = 0$.
2. Číslo opačné k číslu x je určeno jednoznačně. Jsme tedy oprávněni je značit $-x$.
Nechť $y_1 + x = 0$, a také $y_2 + x = 0$. Pak
$$y_1 = 0 + y_1 = y_2 + x + y_1 = y_2 + 0 = y_2.$$
3. Pro libovolné x platí $(-1) \cdot x = -x$.
Musíme ověřit, že $(-1) \cdot x + x = 0$:
$$(-1) \cdot x + x = (-1) \cdot x + 1 \cdot x = ((-1) + 1) \cdot x = 0 \cdot x = 0.$$
4. Bylo použito tvrzení, že $0 \cdot x$ je vždy 0.
Platí $0 + 0 \cdot x = 0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$.
Přičtení čísla $-(0 \cdot x)$ k oběma stranám dá $0 = 0 \cdot x$.

Proč se $(-1) \cdot (-1)$ rovná 1?

1. Číslo y je **opačné** k x , jestliže $y + x = 0$.
2. Číslo opačné k číslu x je určeno jednoznačně. Jsme tedy oprávněni je značit $-x$.
Nechť $y_1 + x = 0$, a také $y_2 + x = 0$. Pak
$$y_1 = 0 + y_1 = y_2 + x + y_1 = y_2 + 0 = y_2.$$
3. Pro libovolné x platí $(-1) \cdot x = -x$.
Musíme ověřit, že $(-1) \cdot x + x = 0$:
$$(-1) \cdot x + x = (-1) \cdot x + 1 \cdot x = ((-1) + 1) \cdot x = 0 \cdot x = 0.$$
4. Bylo použito tvrzení, že $0 \cdot x$ je vždy 0.
Platí $0 + 0 \cdot x = 0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$.
Přičtení čísla $-(0 \cdot x)$ k oběma stranám dá $0 = 0 \cdot x$.
5. Bod 3 aplikován na $x = -1$ dává $(-1) \cdot (-1) = -(-1)$.

Co ještě platí ve struktuře celých čísel?

Kromě asociativity a komutativity obou operací, neutrality nuly a jedničky vůči sčítání a násobení, a distributivity, lze uvažovat ještě axiom oboru integrity (integral domains) a Bezoutovu větu (Bezoutův axiom):

$$\text{ID: } \forall x \forall y (x \cdot y = 0 \rightarrow x = 0 \vee y = 0),$$

$$\text{Bez: } \forall x \forall y \exists u \exists v (x \cdot u + y \cdot v \mid x \ \& \ x \cdot u + y \cdot v \mid y).$$

Co ještě platí ve struktuře celých čísel?

Kromě asociativity a komutativity obou operací, neutrality nuly a jedničky vůči sčítání a násobení, a distributivity, lze uvažovat ještě axiom oboru integrity (integral domains) a Bezoutovu větu (Bezoutův axiom):

$$\text{ID: } \forall x \forall y (x \cdot y = 0 \rightarrow x = 0 \vee y = 0),$$

$$\text{Bez: } \forall x \forall y \exists u \exists v (x \cdot u + y \cdot v \mid x \ \& \ x \cdot u + y \cdot v \mid y).$$

Příklad na Bezoutovu větu

Nechť $x = 15$ a $y = 11$. Pak pro $d = 15 \cdot 3 + 11 \cdot (-4)$ platí $d = 1$, tedy opravdu $d \mid x$ a $d \mid y$.

Když prvočíslo dělí součin $x \cdot y$, pak dělí i x nebo y .

Když prvočíslo dělí součin $x \cdot y$, pak dělí i x nebo y .

Důkaz pro $p = 2$

Když x ani y není dělitelné dvěma, pak $x = 2u + 1$ a $y = 2v + 1$ pro vhodná u a v . Pak ale $x \cdot y = (2u + 1) \cdot (2v + 1) = 4uv + 2u + 2v + 1 = 2(2uv + u + v) + 1$, tedy $x \cdot y$ není dělitelné dvěma.

Když prvočíslo dělí součin $x \cdot y$, pak dělí i x nebo y .

Důkaz pro $p = 2$

Když x ani y není dělitelné dvěma, pak $x = 2u + 1$ a $y = 2v + 1$ pro vhodná u a v . Pak ale $x \cdot y = (2u + 1) \cdot (2v + 1) = 4uv + 2u + 2v + 1 = 2(2uv + u + v) + 1$, tedy $x \cdot y$ není dělitelné dvěma.

Důkaz pro $p = 3$

Když x ani y není dělitelné třemi, pak x je tvaru $3u + 1$ nebo $3u + 2$ a y je tvaru $3v + 1$ nebo $3v + 2$. Pak ale $x \cdot y$ má jeden z tvarů $9uv + 3u + 3v + 1$, $9uv + 6u + 3v + 2$, $9uv + 3u + 6v + 2$, $9uv + 6u + 6v + 4$, tedy není dělitelné třemi.

Když prvočíslo dělí součin $x \cdot y$, pak dělí i x nebo y .

Důkaz pro $p = 2$

Když x ani y není dělitelné dvěma, pak $x = 2u + 1$ a $y = 2v + 1$ pro vhodná u a v . Pak ale $x \cdot y = (2u + 1) \cdot (2v + 1) = 4uv + 2u + 2v + 1 = 2(2uv + u + v) + 1$, tedy $x \cdot y$ není dělitelné dvěma.

Důkaz pro $p = 3$

Když x ani y není dělitelné třemi, pak x je tvaru $3u + 1$ nebo $3u + 2$ a y je tvaru $3v + 1$ nebo $3v + 2$. Pak ale $x \cdot y$ má jeden z tvarů $9uv + 3u + 3v + 1$, $9uv + 6u + 3v + 2$, $9uv + 3u + 6v + 2$, $9uv + 6u + 6v + 4$, tedy není dělitelné třemi.

Důkaz pro $p = 11$

Když x ani y není dělitelné jedenácti, pak x má jeden z tvarů $11u + 1, \dots, 11u + 10$, kdežto y má jeden z tvarů $11v + 1, \dots, 11v + 10$. Pak ale $x \cdot y$ má jeden z tvarů \dots , tedy není dělitelné jedenácti.

Obecný důkaz pro libovolné prvočíslo

Obecný důkaz pro libovolné prvočíslo

Nechť p je prvočíslo a $p \mid xy$. Chceme $p \mid x$ nebo $p \mid y$.

Obecný důkaz pro libovolné prvočíslo

Nechť p je prvočíslo a $p \mid xy$. Chceme $p \mid x$ nebo $p \mid y$.

Aplikujme Bezoutovu větu na p a x : existují u a v taková, že $pu + xv$ dělí p i x .

Obecný důkaz pro libovolné prvočíslo

Nechť p je prvočíslo a $p \mid xy$. Chceme $p \mid x$ nebo $p \mid y$.

Aplikujme Bezoutovu větu na p a x : existují u a v taková, že $pu + xv$ dělí p i x .

Ale p má pouze triviální dělitele, tedy $pu + xv \mid 1$ nebo $p \mid pu + xv$.

Obecný důkaz pro libovolné prvočíslo

Nechť p je prvočíslo a $p \mid xy$. Chceme $p \mid x$ nebo $p \mid y$.

Aplikujme Bezoutovu větu na p a x : existují u a v taková, že $pu + xv$ dělí p i x .

Ale p má pouze triviální dělitele, tedy $pu + xv \mid 1$ nebo $p \mid pu + xv$.

V prvním případě $pu + xv \mid y$, a protože p dělí oba sčítance pu a xv , máme $p \mid y$.

Obecný důkaz pro libovolné prvočíslo

Nechť p je prvočíslo a $p \mid xy$. Chceme $p \mid x$ nebo $p \mid y$.

Aplikujme Bezoutovu větu na p a x : existují u a v taková, že $pu + xv$ dělí p i x .

Ale p má pouze triviální dělitele, tedy $pu + xv \mid 1$ nebo $p \mid pu + xv$.

V prvním případě $pu + xv \mid y$, a protože p dělí oba sčítance pu a xv , máme $p \mid y$.

V druhém případě z $p \mid pu + xv$ a $pu + xv \mid x$ máme $p \mid x$.

Závěry

- ▶ Pro logiku je podstatné vyhledávání **skrytých předpokladů**.

Závěry

- ▶ Pro logiku je podstatné vyhledávání **skrytých předpokladů**.
- ▶ Je také důležité všimnout si **jazyka**, který je potřeba k vyjádření toho, co je třeba vyjádřit.

Závěry

- ▶ Pro logiku je podstatné vyhledávání **skrytých předpokladů**.
- ▶ Je také důležité všimnout si **jazyka**, který je potřeba k vyjádření toho, co je třeba vyjádřit.
- ▶ Pojem **důkazu** je stabilním pojmem, nepřiliš závislým na nuancích definice.

Závěry

- ▶ Pro logiku je podstatné vyhledávání **skrytých předpokladů**.
- ▶ Je také důležité všimnout si **jazyka**, který je potřeba k vyjádření toho, co je třeba vyjádřit.
- ▶ Pojem **důkazu** je stabilním pojmem, nepřiliš závislým na nuancích definice.
- ▶ V důkazech se vyskytují stále tytéž myšlenkové obraty, a je jich jen několik: instanciace, generalizace, kontrapozice, rozbor případů, ...

Závěry

- ▶ Pro logiku je podstatné vyhledávání **skrytých předpokladů**.
- ▶ Je také důležité všimnout si **jazyka**, který je potřeba k vyjádření toho, co je třeba vyjádřit.
- ▶ Pojem **důkazu** je stabilním pojmem, nepříliš závislým na nuancích definice.
- ▶ V důkazech se vyskytují stále tytéž myšlenkové obraty, a je jich jen několik: instanciace, generalizace, kontrapozice, rozbor případů, ...
- ▶ Snažíme-li se vyhledat všechny skryté předpoklady v důkazech z nějaké ucelené oblasti, je rozumná naděje, že jich nebude mnoho.