Typové příklady k přijímacím zkouškám: bakalářský program Logika

U přijímací zkoušky obdržíte 2 až 3 příklady, které budou rozsahově a typově odpovídat následujícím příkladům. Vaším úkolem bude připravit si řešení, které následně představíte formou diskuze komisi. Časový limit na přípravu není stanoven. Není potřeba vyřešit všechny příklady zcela správně: cení se schopnost matematického uvažování, schopnost argumentovat, obhájit své řešení a případně opravit chyby, které se během diskuze objeví ve vaší přípravě.

(1) Reálné číslo je *racionální*, jestliže ho lze zapsat zlomkem ve tvaru $\frac{p}{q}$, kde p, q jsou celá čísla a $q \neq 0$. Reálné číslo, které není racionální, se nazývá *iracionální*. Např. čísla $\sqrt{2}$ a π jsou iracionální čísla.

Rozhodněte, zda jsou následující tvrzení pravdivá či nikoli, a své tvrzení zdůvodněte.

- (a) Součet dvou racionálních čísel je vždy racionální číslo.
- (b) Součin dvou racionálních čísel je vždy racionální číslo.
- (c) Součin dvou iracionálních čísel je vždy iracionální číslo.
- (d) Součet racionálního a iracionálního čísla může být racionální číslo.
- (e) Nechť je dána úsečka AB o délce 3 cm, píšeme $|AB| = 3$ cm. Rozhodněte, zda je možné úsečku AB rozdělit na dvě části AC a CB tak, aby délka obou úseček AC a CB byla rovna nějakému iracionálnímu číslu, tj. $|AC| = x$ a $|CB| = y$ pro nějaká iracionální čísla x, y.

(2) Předpokládejme, že zeměkoule má průměr 12×10^6 m a že se jedná o ideální kouli. Předpokládejme dále, že na pozici 30° severní šířky a 40° východní délky stojí věž s výškou v metrů.

- (a) Vytvořte náčrtek zadání.
- (b) Spočítejte, jak daleko z věže dohlédnete (v metrech), tj. jaká je délka úsečky spojující oči pozorovatele a nejvzdálenější místo na zěměkouli, které lze pozorovat z věže (předpokládejte, že oči pozorovatele stojícího na ochozu věže se nachází ve výšce věže).
- (c) Odvoďte, jak spočítat nejkratší vzdálenost od úpatí věže k bodu určenému v předchozím kroku, když se pohybujete po povrchu koule.

(3) Při výrobě výrobku P je třeba provést deset operací, označené jako

$$A_1, \ldots, A_{10}.$$

Pro tyto operace platí následující dvě podmínky:

- (a) Operace A_2 nesmí být první a operace A_8 nesmí být poslední.
- (b) Operace A_7 musí být provedena dříve než operace A_3.

Odvoďte, kolik různých postupů existuje při výrobě výrobku P.

(4) Jsou dány tři kružnice c_1, c_2, c_3 o poloměru 1 m. Jsou rozmístěny v rovině tak, že každé dvě mají společný právě jeden bod.

(a) Vytvořte náčrtek zadání. Označte bod, v kterém se protínají c_1 a c_2 jako E; bod, kde se protínají c_1 a c_3 jako F; a konečně bod, kde se protínají c_2 a c_3 jako G. Vyznačte na náčrtku rovinný útvar d s třemi vrcholy E, F, G a hranicemi určenými částmi kružnic c_1, c_2, c_3, které spojují body E, F, G.

(b) Spočítejte obsah a obvod útvaru d.

(c) Předpokládejte, že kružnice c_1 má nyní průměr 1,5 m (kružnice c_2 a c_3 mají stále průměr 1 m). Kružnice jsou opět umístěny tak, že určují rovinný útvar d. Uveďte podrobně postup při výpočtu obsahu a obvodu útvaru d při tomto zadání. (Není potřeba provádět vlastní výpočet.)

(5) Zjistěte počet přirozených čtyřciferných čísel, která lze utvořit z číslic $1, 5, 6, 8, 9$ v případě že:

(a) číslice se nesmějí opakovat,

(b) číslice se mohou opakovat.

Pak určete pravděpodobnost, že náhodně vybrané číslo z takto utvořených čtyřciferných čísel, v nichž se

(a) číslice nesmějí opakovat,

(b) číslice mohou opakovat,

je dělitelné čtyřmi.

(6) Je-li X nějaká množina, pak jiná množina Y je její podmnožinou, právě když všechny prvky z Y jsou také v X, symbolicky $Y \subseteq X$. Např. množina přirozených čísel $\{1, 3, 6\}$ je podmnožinou množiny $\{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7\}$.

(a) Dokažte matematickou indukcí podle n, že počet všech podmnožin libovolné množiny o n prvcích se rovná 2^n, pro $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.

(b) Předpokládejme, že množina X má n prvků. Kolik prvků je třeba přidat do množiny X, aby se počet podmnožin zvětšil o 256?

(7) Řekneme, že funkce f z množiny A do množiny B je *bijekce*, jestliže definiční obor je roven A, obor hodnot roven B a f je prostá funkce (tj. pro každé $x, y \in A$, jestliže $x \neq y$, pak $f(x) \neq f(y)$). Rozhodněte, zda existuje bijekce mezi následujícími množinami (pokud existuje, popište ji):

(i) $\{1, 2, 3\}$, $\{19, 21, 23\}$,
(ii) $\mathbb{N}$, $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$,
(iii) $\mathbb{N}$, lichá přirozená čísla,
(iv) Lichá přirozená čísla, sudá přirozená čísla,
(v) $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$,
(vi) $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}^+$,

kde $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ jsou přirozená čísla, $\mathbb{Z}$ jsou celá čísla a $\mathbb{Q}^+$ jsou racionální čísla větší nebo rovna 0.

(8) Načrtněte graf funkce

$$f(x) = \left|\frac{1}{2}\cos(x - \frac{\pi}{2})\right| + 1.$$

(9) Dokažte, že pro každé celé číslo r platí: r je sudé číslo, právě když r^3 je sudé číslo.

(10) Vlak projíždí tunelem dlouhým 220 m. Od okamžiku, kdy vjede do tunelu lokomotiva, až do okamžiku, kdy poslední vagón opustí tunel, uplyne 19 s. Od tohoto okamžiku uplyne dalších 42 sekund, než lokomotiva přijde k domku, který je 1 km od tunelu. Vlak jede stálou rychlostí. Určete rychlost vlaku a délku vlaku.

(11) Reálné číslo r se nazývá racionální, jestliže existují celá čísla p, q, kde $q \neq 0$, a platí $r = \frac{p}{q}$. Reálné číslo, které není racionální, se nazývá iracionální. Předpokládejte, že číslo $\sqrt{2}$ je iracionální. Rozhodněte a zdůvodněte, která z níže uvedených čísel jsou rovněž iracionální:

$$\sqrt{8}, (\sqrt{2})^4, \sqrt{\sqrt{2}}, \sqrt{2} - 2.$$

(12) Řešte v oboru reálných čísel nerovnici:

$$|2x + 1| \leq |x - 3|.$$

(13) Přímky v rovině jsou v obecné poloze, jestliže žádné dvě přímky nejsou rovnoběžné a žádné tři se neprotínají v jednom bodě. Dvě přímky v obecné poloze rozdělují plochu na 4 části, tři přímky v obecné poloze na 7 částí, atd. Najděte a zdůvodněte obecný vzorec, který určuje, na kolik částí rozdělí plochu n přímek v obecné poloze.