Cvičení 01

1. Nahraďte jednotně písmena, číslicemi tak, aby platila uvedená rovnice:

$$(DUB)^2 = \check{Z}ALUD$$

2. Platí rovnice

$$(L + O + R + I)^4 = LORI,$$

kde L, O, R, I jsou jednociferná čísla celá nezáporná a každé písmenko představuje jiné číslo a kde $LORI$ je čtyřciferné číslo skládající se z číslic L, O, R, I. Najděte čísla (číslice) L, O, R, I.

3. Dvě celá čísla sečteme, odečteme, znásobíme a vydělíme. Sečteme-li všechny výsledky, dostaneme číslo 243. Která jsou ona dvě výchozí čísla? Najděte všechna řešení.

4. Odečtením rozdílu druhých mocnin dvou sousedních přirozených čísel od rozdílu jejich třetích mocnin dostaneme číslo 30. Která jsou to čísla?

5. Vedoucí rozděluje děti do skupin. Když je rozdělí do skupin po 5, v poslední skupině zůstane sudý počet dětí. Po 6 rozdělit beze zbytku také nešly, při dělení po 8 opět zůstal sudý počet dětí. Přitom při dělení po 5 bylo o 4 skupiny více než při dělení po 8. Kolik tam bylo dětí?

6. V ZOO mají slony. Součet jejich věků dává po dělení pěti zbytek 4 a po dělení 9 zbytek 8. Všech osm slonů je stejně starých. Zcela jistě jim není více než 60? Jak jsou sloni staří?

7. Šachového turnaje se účastnili chlapci a dívky. Každý hrál s každým jeden zápas. Pouze dívky mezi sebou a pouze chlapci mezi sebou sehráli celkem 66 zápasů. Všech zápasů v turnaji bylo celkem 136. Kolik bylo chlapců a kolik dívek, když chlapců je více?

8. Šachové turnaje se účastnili hráči z Prahy a z Poděbrad. Turnaj se hrál systémem každý s každým jednou. Hráčů z Prahy bylo 3x více než hráčů z Poděbrad ale získali jen o 3 body více. Kolik jich bylo?

9. Šachový turnaj skončil tak, jak ukazuje tabulka. Doplňte výsledky partií.

	L	V	S	K	B	výhry	remízy	prohry	body
Lipták	X					3	1	0	3,5
Vávra		X				2	1	1	2,5
Slepička			X			1	3	0	2,5
Konečný				X		0	2	2	1
Bouz					X	0	1	3	0,5

10. Každý z třiceti studentů umí alespoň jeden z těchto tří cizích jazyků: čínsky, katalánsky nebo velšsky. Čínsky umí 25 studentů, z nichž 6 umí i katalánsky. Počet studentů, kteří umí všechny tři jazyky, je stejný jako počet studentů, kteří umí jenom katalánsky, a také stejný jako počet studentů, kteří umí jenom velšsky. Studentů, kteří umí katalánsky, je o 2 méně než těch, co umí velšsky. Studentů, kteří umí jenom čínsky, je více než dvakrát tolik než těch, co umí jenom čínsky a velšsky. Kolik studentů mluví kterým jazykem?

Řešení

1. Číslo $\check{Z}ALUD$ může být maximálně 98765, takže $DUB = \sqrt{98765} = 314,3$ maximálně. Tj. $D \in \{1, 2, 3\}$. Současně číslice D v čísle $\check{Z}ALUD$ je poslední číslice nějaké druhé mocniny, tj. $D \in \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$. Z toho plyne, že $D = 1$. Pak musí být $B = 9$, protože jiná cifra už nedává koncovou číslici 1.
   Označíme-li $\check{Z}AL = k$, dostaneme rovnici
   $$(109 + 10u)^2 = 100k + 10u + 1$$
   a po úpravách
   $$1188 + 217u = 10(k - u^2)$$
   $$k - u^2 = 118 + 21u + \frac{8 + 7u}{10}$$
   Protože výraz na levé straně je přirozené číslo, musí být i výraz na pravé straně přirozené číslo, takže
   $$8 + 7u = 10t \qquad \Rightarrow \qquad 7u = 10t - 8 \qquad t \in \mathbb{N}$$
   Výraz $10t - 8$ končí vždy číslicí 2, takže $7u = 42$ a $u = 6$.
   $DUB = 169$.

2. $625 = 5^4 < L + O + R + I < 10000 = 10^4$, protože $LORI$ je čtyřmístné číslo. Potom metodou pokus a omyl

6	$6^4 = 1296$	$1 + 2 + 9 + 6 \neq 6$
7	$7^4 = 2401$	$2 + +4 + 0 + 1 = 7$
8	$8^4 = 4096$	$4 + 0 + 9 + 6 \neq 8$
9	$9^4 = 6561$	$6 + 5 + 6 + 1 \neq 9$

   $LORI = 2401$

3. Ze zadání
   $$(x + y) + (x - y) + xy + \frac{x}{y} = 243 = 3^5$$
   $$x(y + 1)^2 = 3^5 y$$
   Vzhledem k tomu, že $(y + 1)^2 \neq y$ a $y \in \mathbb{N}$ musí být
   $$(y + 1)^2 = 3^2 \qquad \vee \qquad (y + 1)^2 = 3^4$$
   $$[x, y] \in \{[54; 2]; [24; 8]\}$$

4. $$[(x + 1)^3 - x^3] - [(x + 1)^2 - x^2] = 30$$
   $$3x^2 + x - 30 = 0$$
   $$(3x + 10)(x - 3) = 0$$
   Hledaná čísla jsou čísla 3 a 4.

5. Ze zadání dostáváme pro $n, k, l \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} n = 5k + y & y \in \{2; 4\} \\ n = 8l + z & z \in \{2; 4; 6\} \\ k = l + 4 \end{cases}$$

$$5(l+4) + y = 8l + z \Rightarrow 3l = 20 + y - z$$

Tato rovnice se pro daná y a z dá splnit dvěma způsoby
a) $y = 2$, $z = 4$, pak $n = 52$
b) $y = 4$, $z = 6$, pak $n = 54$. Toto řešení ale nevyhovuje, protože je dělitelné šesti.
Vedoucí měl 52 dětí.

6. Označíme x věk slonů. Platí: $(x, k, l \in \mathbb{N})$

$$\begin{cases} 8x = 5k + 4 \\ 8x = 9l + 8 \\ 0 < x \le 60 \end{cases}$$

$$5k + 4 = 9l + 8 \Rightarrow k = l + \frac{4l+4}{5}$$

Musí být

$$4l + 4 = 5a, a \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad l = a - 1 + \frac{a}{4} \Rightarrow a = 4t, t \in \mathbb{N}$$

a je tedy $l = 5t - 1$. Dále máme podmínku:

$$0 < 8x \le 480$$

$$0 < 9(5t-1) + 8 \le 480 \quad \Rightarrow t \in \{1..10\}$$

$$x = \frac{45t - 1}{8} = 5t + \frac{5t-1}{t}$$

Této rovnici vyhovuje pro $t \in \{1..10\}$ pouze $t = 5$.
Slonům bylo 28 let.

7. Označíme počet chlapců k a počet dívek d. Podle zadání

$$\begin{cases} \frac{k(k-1)}{2} + \frac{d(d-1)}{2} = 66 \\ \frac{(k+d)(k+d-1)}{2} = 136 \\ d < k \end{cases}$$

Z prvních dvou rovnic dostaneme

$$kd = 70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$$

a) $d = 1$ a $k = 70$ nevyhovuje druhé rovnici.
b) $d = 2 \Rightarrow \dfrac{k(k-1)}{2} + 1 = 66$ nemá celočíselné řešení

c) $d = 5 \Rightarrow \dfrac{k(k-1)}{2} + 10 = 66$ nemá celočíselné řešení

d) $d = 7 \Rightarrow \dfrac{k(k-1)}{2} + 21 = 66 \Rightarrow (k-10)(k+9) = 0$ má řešení $k = 10$

Chlapců bylo 10 a dívek bylo 7.

8. Označíme x počet hráčů z Poděbrad, y počet hráčů z Prahy a p počet bodů, které získali Poděbradští hráči. V turnaji se rozděluje tolik bodů, kolik se hraje partií. Partií se hraje

$$\frac{(x+y)(x+y-1)}{2} = 2p + 3$$

Vzhledem k podmínce $y = 3x$ dostaneme

$$8x^2 - 2x = 2p + 3$$

Maximální počet bodů, které mohou Poděbradští hráči získat, je

$$p \leq (n-1) + (n-2) + \ldots + (n-x),$$

kde $n = 4x$ je celkový počet hráčů.

$$(n-1) + (n-2) + \ldots + (n-x) = nx - \sum_{i=1}^{x} i = 4x^2 - \frac{x(x+1)}{2}$$

$$\begin{cases} 2p = 8x^2 - 2x - 3 \\ 2p \leq 7x^2 - x \end{cases}$$

$$8x^2 - 2x - 3 \leq 7x^2 - x \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 3 \leq 0$$

$x \in \langle \frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2} \rangle$ a vzhledem k podmínkám, vyhovuje pouze $x = 2$. Hráči z Poděbrad byli dva.

9. Konečný a Bouz ani jednou nevyhráli, takže spolu museli remizovat. Obdobně Lipták a Slepička ani jednou neprohráli, takže spolu museli také remizovat. Zbytek snadno dopočítáme.

	L	V	S	K	B	výhry	remízy	prohry	body
Lipták	X		1/2			3	1	0	3,5
Vávra		X				2	1	1	2,5
Slepička	1/2		X			1	3	0	2,5
Konečný				X	1/2	0	2	2	1
Bouz				1/2	X	0	1	3	0,5

10. Označíme podle obrázku x počet studentů, kteří mluví všemi třemi jazyky a a počet studentů, kteří mluví jen čínsky a velšsky.

Obrázek 1:

V pravé polovině musí platit: $2x \leq 5 \quad \Rightarrow \quad x \in \{0; 1; 2\}$
Dále porovnáním počtu studentů mluvících katalánsky a velšsky dostaneme:

$$6 - x + x + 5 - 2x + x = x + 5 - 2x + x + a - 2$$

$$a = 8 - x$$

Konečně z poslední podmínky máme

$$19 - a > 2a \quad \Rightarrow \quad 6 \geq a$$

$$8 - x \geq 6 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

Čínsky mluví 25 studentů, velšsky 11 studentů a katalánsky 9 studentů.