

Vybraná témata z vyčíslitelnosti: handout, otázky (22. května 2026)

Definice turingovské převeditelnosti

Množina $A \subseteq \mathbb{N}$ je *rekurzivně spočetná v množině* $B \subseteq \mathbb{N}$, což píšeme $A \in RE(B)$, jestliže existuje ternární relace $R \in RE$ taková, že

$$A = \{ x ; \exists u \exists v (R(x, u, v) \ \& \ D_u \subseteq B \ \& \ D_v \subseteq -B) \}.$$

Neboli jestliže existuje číslo e takové, že

$$A = \{ x ; \exists u \exists v ([x, u, v] \in W_e^{(3)} \ \& \ D_u \subseteq B \ \& \ D_v \subseteq -B) \}, \quad (5)$$

což lze ještě s pomocí Turingova predikátu napsat tak, aby všechny podstatné kvantifikátory byly před závorkou:

$$A = \{ x ; \exists u \exists v \exists w (T_3(e, x, u, v, w) \ \& \ D_u \subseteq B \ \& \ D_v \subseteq -B) \}. \quad (6)$$

Ovšem kvantifikátor $\exists w$ lze ekvivalentně napsat jak dovnitř závorky, tak před ni. Z (5) nebo (6) lze odvodit enumeraci množin, které jsou v $RE(B)$:

$$W_e^B = \{ x ; \exists u \exists v ([x, u, v] \in W_e^{(3)} \ \& \ D_u \subseteq B \ \& \ D_v \subseteq -B) \}.$$

Tuto enumeraci *množin* lze zřejmým způsobem rozšířit na enumeraci k -árních *relací*. Což by bylo užitečné, kdybychom se pustili do důkazu, že systém podmínek, které jsou rekurzivně spočetné v B , je uzavřen na $\&$, \vee , \exists a omezenou kvantifikaci. Řekneme, že $A \subseteq \mathbb{N}$ je *rekurzivní v množině* $B \subseteq \mathbb{N}$ nebo že A je *turingovsky převeditelná na* B , a píšeme to $A \leq_T B$, jestliže A i $-A$ je v $RE(B)$.

Cvičení

1. Zdůvodněte, že pro každou množinu B platí, že B , $-B$ a každá $A \in RE$ je v $RE(B)$. Takže \leq_T je reflexivní a pro každou množinu B platí $-B \leq_T B$.
2. Zdůvodněte, že když $A \in RE(B)$ a B je rekurzivní, pak $A \in RE$. Pouze rekurzivní množiny jsou tedy převeditelné na rekurzivní množinu.
3. Zdůvodněte, že množina $\{ x ; x \in W_x^B \}$, které se říká *skok* množiny B , je, ale její komplement není v $RE(B)$.

Friedbergova-Muchnikova věta

Existují RE množiny A a B takové, že $A \not\leq_T B$ a $B \not\leq_T A$.

Procedura v důkazu

Volné číslo je takové, že ono ani žádné větší nemá znaménko ani marker.

Stadium $2n$

Umístí marker \boxed{Ln} k prvnímu volnému číslu v levém seznamu.

Označ G množinu všech čísel, která v pravém seznamu mají $+$. Necht y_0, \dots, y_n jsou čísla označená markery $\boxed{L0}, \dots, \boxed{Ln}$. Najdi nejmenší x takové, že y_x nemá $+$ a

$$\exists u < n \exists v < n \exists w < n (T_3(x, y_x, u, v, w) \ \& \ D_u \subseteq G \ \& \ D_v \subseteq -G), \quad (1)$$

neboli takové, že náležení čísla y_x do W_x^G má svědky menší než n . Neexistuje-li takové x , pokračuj ke stadiu $2n + 1$.

Vlevo připiš znaménko $+$ k y_x . Vpravo připiš znaménko $-$ ke všem prvkům množiny

$$\bigcup \{ D_v ; v < n \ \& \ \exists u < n \exists w < n (T_3(x, y_x, u, v, w) \ \& \ D_u \subseteq G \ \& \ D_v \subseteq -G) \}, \quad (2)$$

čili k těm číslům, která se možná negativně uplatnila při potvrzení, že $y_x \in W_x^G$.

Vpravo odstěhuj všechny markery \boxed{Ri} pro $i \geq x$ dolů k volným číslům (se zachováním pořadí a bez vynechávání).

Stadium $2n + 1$

Umístí marker \boxed{Rn} k prvnímu volnému číslu v pravém seznamu.

Označ F množinu všech čísel, která v levém seznamu mají $+$. Necht z_0, \dots, z_n jsou čísla označená markery $\boxed{R0}, \dots, \boxed{Rn}$. Najdi nejmenší x takové, že z_x nemá $+$ a

$$\exists u < n \exists v < n \exists w < n (T_3(x, z_x, u, v, w) \ \& \ D_u \subseteq F \ \& \ D_v \subseteq -F), \quad (3)$$

neboli takové, že náležení čísla z_x do W_x^F má svědky menší než n . Neexistuje-li takové x , pokračuj ke stadiu $2n + 2$.

Vpravo připiš znaménko $+$ k z_x . Vlevo připiš znaménko $-$ ke všem prvkům množiny

$$\bigcup \{ D_v ; v < n \ \& \ \exists u < n \exists w < n (T_3(x, z_x, u, v, w) \ \& \ D_u \subseteq F \ \& \ D_v \subseteq -F) \} \quad (4)$$

a odstěhuj všechny markery \boxed{Li} pro $i > x$ dolů k volným číslům (se zachováním pořadí a bez vynechávání).

Důkaz věty

Označme A všechna čísla, která v levém seznamu někdy dostanou $+$, a B všechna čísla, která v pravém seznamu někdy dostanou $+$. Je jasné, že A a B jsou RE množiny. Zároveň pozorujme, že $+$ se přiděluje číslu, které předtím znaménko nemělo nebo mělo $-$. Takže $-$ se může změnit na $+$. Ale jednou přidělené $+$ se už nikdy nemění ani nemizí. Množiny F a G jsou v každém stadiu konečné.

Markery se mohou stěhovat, ale se zachováním pořadí: markery s vyšším indexem jsou přiděleny k větším číslům. Pokud je marker odněkud odstěhován,

nemůže se tam už objevit jiný marker. Znaménko $+$ může být připsáno pouze k číslu, které právě má marker. Připsání znaménka $+$ k číslu označenému markerem \boxed{Lx} znamená odstěhování markerů \boxed{Ri} pro $i \geq x$, a připsání znaménka $+$ k číslu označenému markerem \boxed{Rx} znamená odstěhování markerů \boxed{Li} pro $i > x$. Nahlíženo z druhé strany to znamená, že marker \boxed{Rx} se stěhuje nejvýše jednou pro každou pozici některého markeru \boxed{Li} pro $i \leq x$, kdežto marker \boxed{Lx} se stěhuje nejvýše jednou pro každou pozici některého markeru \boxed{Ri} pro $i < x$. Takže marker $\boxed{L0}$ se nikdy nestěhuje, marker $\boxed{R0}$ se stěhuje nejvýše jednou, a obecně každý marker se stěhuje nejvýše konečněkrát. Označme $f(x)$ finální pozici markeru \boxed{Lx} a označme $g(x)$ finální pozici markeru \boxed{Rx} . Tvrdíme a ověříme, že $\forall x(f(x) \in A \Leftrightarrow f(x) \in W_x^B)$ a $\forall x(g(x) \in B \Leftrightarrow g(x) \in W_x^A)$.

Nechť $f(x) \in A$. To znamená, že v nějakém sudém stadiu byl marker \boxed{Lx} přidělen k číslu $f(x)$ a už tam zůstal. V tomtéž nebo pozdějším stadiu $2n$ číslo $f(x)$ hrálo v proceduře roli čísla y_x splňujícího podmínku (1). Existují tedy čísla u , v a w menší než n , která ve stadiu $2n$ splňovala podmínky $T_3(x, y_x, u, v, w)$, $D_u \subseteq G$ a $D_v \subseteq -G$. Množina D_v je jednou z množin, které vystupují ve sjednocení (2). Takže všechny její prvky dostaly ve stadiu $2n$ znaménko $-$. Marker \boxed{Ri} pro $i \geq x$ v budoucnu nezmění žádné z těchto znamének, protože ve stadiu $2n$ byl odstěhován. Marker \boxed{Ri} pro $i < x$ již nevygeneruje žádné $+$, protože to by odstěhovalo marker \boxed{Lx} , takže $f(x)$ by nebyla jeho finální pozice. Všechna znaménka $-$ přidělená ve stadiu $2n$ prvkům množiny D_v již zůstanou zachována, takže platí $D_v \subseteq -B$. Protože $D_u \subseteq G \subseteq B$, čísla u , v a w demonstrují, že $f(x) \in W_x^B$.

Nechť naopak $f(x) \in W_x^B$. Máme tedy u , v a w taková, že $T_3(x, y_x, u, v, w)$, $D_u \subseteq B$ a $D_v \subseteq -B$. V některém dost vysokém stadiu $2n$ poprvé nastane to, že $u < n$, $v < n$ a $w < n$ a přitom všechny prvky množiny D_u již mají plus. To už pak platí pořád. Takže x v tom a v každém dalším stadiu splňuje podmínku (1). Takže v tomto nebo možná o něco pozdějším sudém stadiu se x stane nejmenším číslem splňujícím podmínku (1), a $f(x)$ čili y_x dostane $+$.

Ověření druhé ekvivalence (pro funkci g) je naprosto analogické. A závěr je z toho následující. Číslo $f(x)$ je v množině $A \cap W_x^B$ nebo v komplementu množiny $A \cup W_x^B$, takže $-A \neq W_x^B$. Toto platí pro každé x , takže $-A \notin RE(B)$. A analogicky, $-B \notin RE(A)$.

Otázky

1. Aritmetická hierarchie. Univerzální relace pro třídu Σ_m .
2. Věta o parametrech a některé její aplikace. Každá z množin K , Unb a Tot je na své úrovni m -kompletní.
3. Vlastnosti produktivních množin. Kreativní množiny.

4. Konstrukce jednoduché (simple) množiny. Jednoduchá množina není rekurzivní ani m -kompletní.
5. Myhillova věta. M -stupeň jednoduché množiny sestává z nekonečně mnoha 1-stupňů.
6. Cylindry, ekvivalentní definice.
7. Každá RE množina, na kterou je m -převoditelná množina K , je cylindr. Každá m -kompletní množina je tedy 1-kompletní.
8. T -převoditelnost a Friedbergova-Muchnikova věta.

Reference

- [1] F. Bártík. Alternativní definice Turingovské převoditelnosti. Ročníková práce, Katedra logiky Filozofické fakulty, Karlova Univerzita v Praze, 2007.
- [2] A. Horská. Friedberg-Muchnikova věta. Ročníková práce, Katedra logiky Filozofické fakulty, Karlova Univerzita v Praze, 2007.
- [3] H. Rogers, Jr. *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*. McGraw-Hill, New York, 1967.