

Úvod do neklasických logik

Vítězslav Švejdar

<https://www1.cuni.cz/~svejdar/>

8. října 2026

Připomenutí: formule různých logik

Formule predikátové logiky s rovností

Jsou sestaveny pomocí logických spojek a kvantifikátorů z atomických formulí. *Atomická formule* má tvar $P(t_1, \dots, t_k)$, kde P je k -ární predikátový symbol a t_1 až t_k jsou termy. *Term* je sestaven pomocí funkčních symbolů z proměnných. Predikátové i funkční symboly musí patřit do předem zvoleného *jazyka*. Pokud jsou binární, často je píšeme *mezi* operandy. Rovnítko $=$ je vždy povolené, ale do předem zvoleného jazyka je nepočítáme. Logické spojky: $\rightarrow$, $\neg$, $\&$, $\vee$, $\equiv$, $\perp$, $\top$. Příklad formule v jazyce Peanovy aritmetiky:

Připomenutí: formule různých logik

Formule predikátové logiky s rovností

Jsou sestaveny pomocí logických spojek a kvantifikátorů z atomických formulí. *Atomická formule* má tvar $P(t_1, \dots, t_k)$, kde P je k -ární predikátový symbol a t_1 až t_k jsou termy. *Term* je sestaven pomocí funkčních symbolů z proměnných. Predikátové i funkční symboly musí patřit do předem zvoleného *jazyka*. Pokud jsou binární, často je píšeme *mezi* operandy. Rovnítko $=$ je vždy povolené, ale do předem zvoleného jazyka je nepočítáme.

Logické spojky: $\rightarrow$, $\neg$, $\&$, $\vee$, $\equiv$, $\perp$, $\top$. Příklad formule v jazyce Peanovy aritmetiky: $\forall v (v \mid x \rightarrow v = 1 \vee \bar{2} \mid x)$.

Připomenutí: formule různých logik

Formule predikátové logiky s rovností

Jsou sestaveny pomocí logických spojek a kvantifikátorů z atomických formulí. *Atomická formule* má tvar $P(t_1, \dots, t_k)$, kde P je k -ární predikátový symbol a t_1 až t_k jsou termy. *Term* je sestaven pomocí funkčních symbolů z proměnných. Predikátové i funkční symboly musí patřit do předem zvoleného *jazyka*. Pokud jsou binární, často je píšeme *mezi* operandy. Rovnítko $=$ je vždy povolené, ale do předem zvoleného jazyka je nepočítáme. Logické spojky: $\rightarrow, \neg, \&, \vee, \equiv, \perp, \top$. Příklad formule v jazyce Peanovy aritmetiky: $\forall v (v \mid x \rightarrow v = 1 \vee \bar{2} \mid x)$.

Formule výrokové logiky

Jsou sestaveny z atomů pomocí logických spojek.

Připomenutí: formule různých logik

Formule predikátové logiky s rovností

Jsou sestaveny pomocí logických spojek a kvantifikátorů z atomických formulí. *Atomická formule* má tvar $P(t_1, \dots, t_k)$, kde P je k -ární predikátový symbol a t_1 až t_k jsou termy. *Term* je sestaven pomocí funkčních symbolů z proměnných. Predikátové i funkční symboly musí patřit do předem zvoleného *jazyka*. Pokud jsou binární, často je píšeme *mezi* operandy. Rovnítko $=$ je vždy povolené, ale do předem zvoleného jazyka je nepočítáme. Logické spojky: $\rightarrow$, $\neg$, $\&$, $\vee$, $\equiv$, $\perp$, $\top$. Příklad formule v jazyce Peanovy aritmetiky: $\forall v (v \mid x \rightarrow v = 1 \vee \bar{2} \mid x)$.

Formule výrokové logiky

Jsou sestaveny z atomů pomocí logických spojek.

Formule modální výrokové logiky

Jsou sestaveny z atomů pomocí logických spojek a modalit $\Box$ a $\Diamond$.

Důkaz a dokazatelnost v hilbertovském kalkulu

Definice

Posloupnost $A_1, \dots, A_m$ formulí je *důkaz* formule A , jestliže
(i) A_m je A , a (ii) každá A_i je logický axiom, nebo je některým logickým pravidlem odvozena z některých předchozích formulí.

Důkaz a dokazatelnost v hilbertovském kalkulu

Definice

Posloupnost $A_1, \dots, A_m$ formulí je *důkaz* formule A , jestliže
(i) A_m je A , a (ii) každá A_i je logický axiom, nebo je některým logickým pravidlem odvozena z některých předchozích formulí.
Formule A je *dokazatelná*, což píšeme $\vdash A$, jestliže existuje její důkaz.

Důkaz a dokazatelnost v hilbertovském kalkulu

Definice

Posloupnost $A_1, \dots, A_m$ formulí je *důkaz* formule A , jestliže
(i) A_m je A , a (ii) každá A_i je logický axiom, nebo je některým logickým pravidlem odvozena z některých předchozích formulí.
Formule A je *dokazatelná*, což píšeme $\vdash A$, jestliže existuje její důkaz.

Věta o úplnosti (daného kalkulu vůči příslušné sémantice)

Formule je v daném kalkulu dokazatelná, právě když je platná (ve smyslu dané sémantiky).

Důkaz a dokazatelnost v hilbertovském kalkulu

Definice

Posloupnost $A_1, \dots, A_m$ formulí je *důkaz* formule A , jestliže
(i) A_m je A , a (ii) každá A_i je logický axiom, nebo je některým logickým pravidlem odvozena z některých předchozích formulí.
Formule A je *dokazatelná*, což píšeme $\vdash A$, jestliže existuje její důkaz.

Věta o úplnosti (daného kalkulu vůči příslušné sémantice)

Formule je v daném kalkulu dokazatelná, právě když je platná (ve smyslu dané sémantiky).

Věta o korektnosti (...)

Každá dokazatelná formule je platná (...).

Konkrétní hilbertovské kalkuly

Klasická výroková logika má *logické axiomy* například

Konkrétní hilbertovské kalkuly

Klasická výroková logika má *logické axiomy* například

A1: $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

Konkrétní hilbertovské kalkuly

Klasická výroková logika má *logické axiomy* například

A1: $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

A3: $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A)$

Konkrétní hilbertovské kalkuly

Klasická výroková logika má *logické axiomy* například

A1: $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

A3: $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A)$

$$\perp \rightarrow A$$

Konkrétní hilbertovské kalkuly

Klasická výroková logika má *logické axiomy* například

A1: $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

A3: $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A)$

$$\perp \rightarrow A$$

plus několik dalších,

Konkrétní hilbertovské kalkuly

Klasická výroková logika má logické axiomy například

A1: $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

A3: $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A)$

$$\perp \rightarrow A$$

plus několik dalších, plus jediné odvozovací pravidlo *modus ponens*

MP: $A, A \rightarrow B / B.$

Konkrétní hilbertovské kalkuly

Klasická výroková logika má *logické axiomy* například

$$\text{A1: } A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$\text{A3: } (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A)$$

$$\perp \rightarrow A$$

plus několik dalších, plus jediné odvozovací pravidlo *modus ponens*

$$\text{MP: } A, A \rightarrow B / B.$$

Klasická predikátová logika má navíc dva axiomy specifikace a dvě pravidla generalizace

Konkrétní hilbertovské kalkuly

Klasická výroková logika má *logické axiomy* například

A1: $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

A3: $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A)$

$$\perp \rightarrow A$$

plus několik dalších, plus jediné odvozovací pravidlo *modus ponens*

MP: $A, A \rightarrow B / B.$

Klasická predikátová logika má navíc dva axiomy specifikace a dvě pravidla generalizace

Spec: $\forall x A(x) \rightarrow A_x(t) \quad \text{a} \quad A_x(t) \rightarrow \exists x A(x)$

Konkrétní hilbertovské kalkuly

Klasická výroková logika má *logické axiomy* například

$$\text{A1: } A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$\text{A3: } (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A)$$

$$\perp \rightarrow A$$

plus několik dalších, plus jediné odvozovací pravidlo *modus ponens*

$$\text{MP: } A, A \rightarrow B / B.$$

Klasická predikátová logika má navíc dva axiomy specifikace a dvě pravidla generalizace

$$\text{Spec: } \forall x A(x) \rightarrow A_x(t) \quad \text{a} \quad A_x(t) \rightarrow \exists x A(x)$$

$$\text{Gen: } B \rightarrow A(x) / B \rightarrow \forall x A(x) \quad \text{a} \quad A(x) \rightarrow B / \exists x A(x) \rightarrow B,$$

kde proměnná x nesmí mít volné výskyty ve formuli B .

Konkrétní hilbertovské kalkuly

Klasická výroková logika má *logické axiomy* například

$$\text{A1: } A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$\text{A3: } (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A)$$

$$\perp \rightarrow A$$

plus několik dalších, plus jediné odvozovací pravidlo *modus ponens*

$$\text{MP: } A, A \rightarrow B / B.$$

Klasická predikátová logika má navíc dva axiomy specifikace a dvě pravidla generalizace

$$\text{Spec: } \forall x A(x) \rightarrow A_x(t) \quad \text{a} \quad A_x(t) \rightarrow \exists x A(x)$$

$$\text{Gen: } B \rightarrow A(x) / B \rightarrow \forall x A(x) \quad \text{a} \quad A(x) \rightarrow B / \exists x A(x) \rightarrow B,$$

kde proměnná x nesmí mít volné výskyty ve formuli B .

Modální logika K má navíc jeden logický axiom a jedno pravidlo

Konkrétní hilbertovské kalkuly

Klasická výroková logika má *logické axiomy* například

$$\text{A1: } A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$\text{A3: } (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A)$$

$$\perp \rightarrow A$$

plus několik dalších, plus jediné odvozovací pravidlo *modus ponens*

$$\text{MP: } A, A \rightarrow B / B.$$

Klasická predikátová logika má navíc dva axiomy specifikace a dvě pravidla generalizace

$$\text{Spec: } \forall x A(x) \rightarrow A_x(t) \quad \text{a} \quad A_x(t) \rightarrow \exists x A(x)$$

$$\text{Gen: } B \rightarrow A(x) / B \rightarrow \forall x A(x) \quad \text{a} \quad A(x) \rightarrow B / \exists x A(x) \rightarrow B,$$

kde proměnná x nesmí mít volné výskyty ve formuli B .

Modální logika K má navíc jeden logický axiom a jedno pravidlo

$$\text{K: } \Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$$

Konkrétní hilbertovské kalkuly

Klasická výroková logika má *logické axiomy* například

$$\text{A1: } A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$\text{A3: } (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A)$$

$$\perp \rightarrow A$$

plus několik dalších, plus jediné odvozovací pravidlo *modus ponens*

$$\text{MP: } A, A \rightarrow B / B.$$

Klasická predikátová logika má navíc dva axiomy specifikace a dvě pravidla generalizace

$$\text{Spec: } \forall x A(x) \rightarrow A_x(t) \quad \text{a} \quad A_x(t) \rightarrow \exists x A(x)$$

$$\text{Gen: } B \rightarrow A(x) / B \rightarrow \forall x A(x) \quad \text{a} \quad A(x) \rightarrow B / \exists x A(x) \rightarrow B,$$

kde proměnná x nesmí mít volné výskyty ve formuli B .

Modální logika K má navíc jeden logický axiom a jedno pravidlo

$$\text{K: } \Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$$

$$\text{Nec: } A / \Box A.$$

Sémantika klasické výrokové logiky

Definice

Výroková formule A je *tautologie*, jestliže $v(A) = 1$ pro každé pravdivostní ohodnocení v .

Sémantika klasické výrokové logiky

Definice

Výroková formule A je *tautologie*, jestliže $v(A) = 1$ pro každé pravdivostní ohodnocení v . **Pravdivostní ohodnocení** je funkce, která každé formuli přiřazuje jednu z pravdivostních hodnot 0 a 1, a přitom respektuje pravdivostní tabulky logických spojek.

Sémantika klasické výrokové logiky

Definice

Výroková formule A je *tautologie*, jestliže $v(A) = 1$ pro každé pravdivostní ohodnocení v . Pravdivostní ohodnocení je funkce, která každé formuli přiřazuje jednu z pravdivostních hodnot 0 a 1, a přitom respektuje pravdivostní tabulky logických spojek.

Příklad: pravdivostní tabulka implikace

$\rightarrow$	0	1
0	1	1
1	0	1

Sémantika klasické výrokové logiky

Definice

Výroková formule A je *tautologie*, jestliže $v(A) = 1$ pro každé pravdivostní ohodnocení v . Pravdivostní ohodnocení je funkce, která každé formuli přiřazuje jednu z pravdivostních hodnot 0 a 1, a přitom respektuje pravdivostní tabulky logických spojek.

Příklad: pravdivostní tabulka implikace

$\rightarrow$	0	1
0	1	1
1	0	1

Metody prokazování dokazatelnosti a nedokazatelnosti

Sémantika klasické výrokové logiky

Definice

Výroková formule A je *tautologie*, jestliže $v(A) = 1$ pro každé pravdivostní ohodnocení v . Pravdivostní ohodnocení je funkce, která každé formuli přiřazuje jednu z pravdivostních hodnot 0 a 1, a přitom respektuje pravdivostní tabulky logických spojek.

Příklad: pravdivostní tabulka implikace

$\rightarrow$	0	1
0	1	1
1	0	1

Metody prokazování dokazatelnosti a nedokazatelnosti

Věta o korektnosti (**daného** kalkulu) je nástroj pro prokazování nedokazatelnosti.

Sémantika klasické výrokové logiky

Definice

Výroková formule A je *tautologie*, jestliže $v(A) = 1$ pro každé pravdivostní ohodnocení v . Pravdivostní ohodnocení je funkce, která každé formuli přiřazuje jednu z pravdivostních hodnot 0 a 1, a přitom respektuje pravdivostní tabulky logických spojek.

Příklad: pravdivostní tabulka implikace

$\rightarrow$	0	1
0	1	1
1	0	1

Metody prokazování dokazatelnosti a nedokazatelnosti

Věta o korektnosti (daného kalkulu) je nástroj pro prokazování nedokazatelnosti. Věta o úplnosti *výrokového* kalkulu je užitečná i v predikátové nebo modální logice.