Poznámky ke strukturálnímu důkazu Rosserovy věty

Vítězslav Švejdar

Potřebujeme si opatřit disjunktní mnořiny $A, B \in \mathit{RS}$ s vlastností, že každá nadmnožina jedné disjunktní s druhou je Σ_1-kompletní.

Krok 1, konstrukce množin A, B:

$$A = \{\, x\,;\ 1 \dot{-} \varphi_x(x) = 1 \,\}, \qquad B = \{\, x\,;\ 1 \dot{-} \varphi_x(x) = 0 \,\}. \tag{1}$$

Množiny A, B jsou evidentně RS a disjunktní. V knize [Šv] ve větě 2.2.47 na straně 110 je jiná konstrukce takových množin, známá (mně známá) z článku Hájkové a Hájka.

Krok 2, vlastně zobecnění Postovy věty. Představujme si o x a y, že jsou to indexy libovolných RS množin, definujme funkci ψ

$$\psi(x, y, v) \simeq \mathrm{T}(x, v, \mu w(\mathrm{T}(x, v, w) \vee \mathrm{T}(y, v, w)))$$

a označme e její index. Tato funkce hledá svědka pro $v \in \mathrm{W}_x \vee v \in \mathrm{W}_y$, a když (pokud) jej vyhledá, dá výsledek 1 nebo 0 podle toho, jestli je to svědek pro $v \in \mathrm{W}_x$. Písmenem T je označen Turingův predikát. Funkce $\lambda v \psi(x, y, v)$ má definiční obor $\mathrm{W}_x \cup \mathrm{W}_y$ a dle věty o parametrech má index $\mathrm{s}^1_2(e, x, y)$. Má hodnoty 1 všude na $\mathrm{W}_x - \mathrm{W}_y$ a hodnoty 0 všude na $\mathrm{W}_y - \mathrm{W}_x$:

$$\forall v(v \in \mathrm{W}_x - \mathrm{W}_y \;\Rightarrow\; \varphi_{\mathrm{s}^1_2(e,x,y)}(v) = 1), \tag{2}$$

$$\forall v(v \in \mathrm{W}_y - \mathrm{W}_x \;\Rightarrow\; \varphi_{\mathrm{s}^1_2(e,x,y)}(v) = 0). \tag{3}$$

Krok 3, A a B jsou efektivně rekurzívně neoddělitelné. Znamená to ověřit, že když o množinách W_x a W_y navíc platí $A \subseteq \mathrm{W}_x$, $B \subseteq \mathrm{W}_y$ a $\mathrm{W}_x \cap \mathrm{W}_y = \emptyset$, pak $\mathrm{s}^1_2(e, x, y) \notin \mathrm{W}_x \cup \mathrm{W}_y$. A to je pravda: když $\mathrm{s}^1_2(e, x, y) \in \mathrm{W}_x$, pak (2) dává $\varphi_{\mathrm{s}^1_2(e,x,y)}(\mathrm{s}^1_2(e, x, y)) = 1$, z (1) pak $\mathrm{s}^1_2(e, x, y) \in B$, spor; $\mathrm{s}^1_2(e, x, y) \in \mathrm{W}_y$ vede ke sporu analogicky.

Protože efektivně rekurzívně neoddělitelné množiny mají tu vlastnost, že každá nadmnožina jedné disjunktní s druhou je kreativní, a dále každá kreativní je Σ_1-kompletní, jsme hotovi. Ale byla užita určitá znalost teorie rekurzívních funkcí,

Σ_1-kompletnost kreativních množin se obvykle dokazuje pomocí věty o rekurzi. Podrobnější úvahy ale umožňují dokázat potřebné přímo.

Krok 4, každá nadmnožina C některé z množin A a B disjunktní s druhou je efektivně nerekurzívní. Považujme W_y za množinu C, čili mysleme si, že y se nemění, $\mathrm{s}_2^1(e, x, y)$ je funkce proměnné x s konstantami e a y, říkejme jí $g(x)$. Předpoklad je teď pouze $B \subseteq \mathrm{W}_y = C$ a $C \cap A = \emptyset$, o W_x nepředpokládáme nic. Nechť $g(x) \in C$ a $g(x) \notin \mathrm{W}_x$. Z podmínky (3) máme $\varphi_{g(x)}(g(x)) = 0$, tedy $1 \dot{-} \varphi_{g(x)}(g(x)) = 1$, tedy (1) dává $g(x) \in A$, spor s $C \cap A = \emptyset$. Nechť $g(x) \notin C$ a $g(x) \in \mathrm{W}_x$. Z podmínky (2) máme $\varphi_{g(x)}(g(x)) = 1$, tedy $1 \dot{-} \varphi_{g(x)}(g(x)) = 0$ a $g(x) \in B$, spor s $B \subseteq C$. Tím je dokázáno $\forall x(g(x) \in C \Leftrightarrow g(x) \in \mathrm{W}_x)$, efektivní nerekurzívnost množiny C.

Krok 5, efektivně nerekurzívní množina musí být Σ_1-kompletní, to je celkem rychle dokázáno v [Šv], věta 2.2.46.