Plán kursu/semináře *Kapitoly z klasické logiky*, 2014/15
(20. září 2014)

Seznam témat

1 Autoreference Tradiční důkaz První Gödelovy věty je založen na autoreferenční konstrukci zvané Gödelova sentence, tj. na sentenci, která o sobě tvrdí já jsem nedokazatelná. Další důležité autoreferenční sentence jsou například Rosserova nebo Henkinova sentence. Důležité vlastnosti axiomatických teorií, vyjádřené v První Gödelově větě a v Rosserově větě, lze dnes dokázat jinak a možná i názorněji než pomocí autoreference, avšak jako logická metoda je autoreference zajímavá pořád. Lze se například ptát, zda sentence daná autoreferenční konstrukcí je určena jednoznačně, tj. zda dvě sentence, z nichž každá tvrdí o sobě dokazatelně v nějaké teorii T, že je nedokazatelná, musí spolu dokazatelně v téže teorii T být ekvivalentní. Nebo zda ty vlastnosti autoreferenční sentence, kvůli kterým byla sestrojena, například nezávislost na teorii T, lze dokázat už v teorii T. Existuje více variant věty o autoreferenci, například autoreference v množném čísle, kdy každá z několika nebo i nekonečně mnoha sentencí tvrdí něco o sobě a o ostatních.

[1] M. H. Löb. Solution of a problem of Leon Henkin. *J. Symbolic Logic*, 20:115–118, 1955.

2 Logika dokazatelnosti je modální výroková logika, jejíž *aritmetická sémantika* je založena na tom, že nutnost se chápe jako formální dokazatelnost v nějaké axiomatické teorii. Axiomy logiky dokazatelnosti jsou založeny na podmínkách D1–D3 pro dokazatelnost formulovaných v článku [1] předchozího tématu 1. Logika dokazatelnosti poskytuje vhled do důkazu Druhé Gödelovy věty o neúplnosti a do fungování některých autoreferenčních konstrukcí, a umožňuje také například odpovědět na otázku po jednoznačnosti (některých) autoreferenčních sentencí. Na druhé straně, tato logika má také *kripkovskou sémantiku* podobnou sémantice ostatních běžně studovaných modálních logik, lze na ni aplikovat metody běžné ve studiu modálních logik a je zajímavá i třeba z důkazově teoretického hlediska nebo z hlediska výpočtové složitosti. Téma může nebo nemusí být spojeno s následujícím tématem 3 nebo s předchozím tématem 1.

[1] G. Boolos. *The Logic of Provability.* Cambridge University Press, 1993.

[2] V. Švejdar. On provability logic. *Nordic Journal of Philosophical Logic*, 4(2):95–116, 2000.

3 Aritmetická úplnost logiky dokazatelnosti R. Solovay [1] nalezl důkaz úplnosti logiky dokazatelnosti vůči aritmetické sémantice. Je zajímavý tím, že k důkazu důležité vlastnosti logiky dokazatelnosti, která byla vytvořena jako nástroj ke studiu autoreference, se opět používá autoreference (v množném čísle), a to pozoruhodným a netriviálním způsobem. Větu o úplnosti logiky dokazatelnosti lze interpretovat tak, že logika dokazatelnosti *věrně modeluje* uvažování o (některých) autorerenčních sentencích a o sentencích vyjadřujících bezespornost.

[1] R. M. Solovay. Provability interpretations of modal logic. *Israel J. Math.*, 25:287–304, 1976.

[2] V. Švejdar. *Logika: neúplnost, složitost a nutnost.* Academia, 2002.

4 Něco o metamatematice teorie množin nebo Peanovy aritmetiky Článek [3] je dnes zajímavý spíše z historického hlediska. Avšak lze z něj vyčíst snadný sémantický důkaz, že GB (někdy se značí NBG) je konzervativním rozšířením ZF. Dále je v něm důležité pojednání o neobsaditelných číslech, ze kterého plyne, že Kelly-Morseova teorie množin KM není konzervativním rozšířením ZF a že v GB nelze dokázat indukci pro všechny formule. To poslední souvisí s faktem, že ne každá formule určuje v GB třídu.

V knize [2] (měla by být v knihovně MFF UK, Sokolovská 83) by nás mohl zajímat *princip reflexe*, který lze použít k důkazu, že ZF není konečně axiomatizovatelná.

Lze navrhnout teorii, která se značí ACA_0 a která se má k Peanově aritmetice stejně, jako se má GB k ZF.

[1] P. Hájek a P. Pudlák. *Metamathematics of First Order Arithmetic.* Springer, 1993.

[2] T. Jech. *Lectures in Set Theory with an Emphasis to the Method of Forcing.* Springer, Berlin, 1973.

[3] P. Vopěnka a P. Hájek. Existence of a generalized semantic model of Gödel-Bernays set theory. *Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences. Série des sciences math., astr., et phys.*, XXI(12), 1973.

5 Eliminovatelnost řezů v klasické predikátové logice Důkaz věty o eliminovatelnosti řezů (každý sekvent dokazatelný v gentzenovském kalkulu je v tomto kalkulu dokazatelný i bez užití pravidla řezu) lze najít v [1], [4] a v [3]. V Barwisově kapitole [3] je navíc vypracován horní odhad, tj. je tam stanoveno, jak maximálně se důkaz prodlouží, jsou-li z něj eliminovány řezy. Toto je ale uděláno pro zvlášť upravený (ne zcela přirozený) kalkulus. V diplomové práci [2] a později také v mé knize je eliminovatelnost řezů s horním odhadem podána i pro běžný kalkulus.

[1] S. C. Kleene. *Introduction to Metamathematics.* D. van Nostrand, 1952.

[2] I. Kylar. Eliminace řezů v klasické predikátové logice. Diplomová práce, Filozofická fakulta University Karlovy, katedra logiky, 2000.

[3] H. Schwichtenberg. Proof theory. V J. Barwise, editor, *Handbook of Mathematical Logic*, kapitola D2. North-Holland, 1977.

[4] G. Takeuti. *Proof Theory.* North-Holland, Amsterdam, 1975.

6 Spodní odhad pro eliminaci řezů P. Pudlák nalezl velmi pěkný důkaz, že horní odhad, o kterém je řeč v předchozím tématu, je optimální nebo blízký optimálnímu. Optimálnost znamená, že některé důkazy se eliminací řezů *nesmírně* prodlouží. Pudlákův důkaz je v práci [2] předchozího tématu. Velmi stručně je také v Bussově [1], něco lze vyčíst i z mých poznámek ke krátkému kursu. K tématu lze pravděpodobně nalézt další (novější a přesnější) zdroje.

[1] S. R. Buss, editor. *Handbook of Proof Theory.* Číslo 137 řady Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Elsevier, 1998.

7 Gentzenův důkaz bezespornosti Peanovy aritmetiky Gentzenovský kalkulus je možné navrhnout nejen pro výrokovou či predikátovou logiku a pro některé další logiky, například pro logiku dokazatelnosti, ale i pro Peanovu aritmetiku, a metodou eliminace řezů pak ukázat, že Peanova aritmetika je bezesporná. Význam tohoto důkazu je v tom, že ukazuje, co přesně stačí k důkazu bezespornosti Peanovy aritmetiky: ordinální indukce do čísla ε_0. Čitelný důkaz je v knize [4] tématu 5. Jiný důkaz, který jsem nestudoval, je ve Schwichtenbergově kapitole [3]. Dobře čitelné jsou prý také Gentzenovy původní články a nově je k dispozici kniha A. Horské [1].

[1] A. Horská. *Where is the Gödel-point hiding: Gentzens Consistency Proof of 1936 and His Representation of Constructive Ordinals.* SpringerBriefs in philosophy. Springer, 2013. 77 pages.

8 Fragmenty aritmetiky a princip kolekce V článku [1] se zkoumají vztahy mezi tzv. silnými fragmenty Peanovy aritmetiky, tj. teoriemi, které místo schématu indukce mají následující axiomatická schémata:

$$\mathrm{I}\Sigma_n: \quad \forall \underline{y}(\varphi(0,\underline{y})\ \&\ \forall x(\varphi(x,\underline{y}) \to \varphi(\mathrm{S}(x),\underline{y})) \to \forall x\varphi(x,\underline{y})), \quad \varphi \in \Sigma_n$$

(normální indukce, ale jen pro formule, jejichž složitost je nejvýše Σ_n), a

$$\mathrm{B}\Sigma_n: \quad \forall \underline{y}\forall z(\forall u{<}z\,\exists v\varphi(u,v,\underline{y}) \to \exists w\forall u{<}z\,\exists v{<}w\,\varphi(u,v,\underline{y})), \quad \varphi \in \Sigma_n,$$

(schéma kolekce pro tytéž formule). Informace o těchto teoriích je také v knize Hájek–Pudlák z tématu 4 a ve cvičeních mé knihy.

[1] J. B. Paris a L. A. S. Kirby. Σ_n-collection schemas in arithmetic. V A. Macintyre, L. Pacholski a J. Paris, editoři, *Logic Colloquium '77*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, str. 199–209. North-Holland, Amsterdam, 1978.

9 Něco o neklasických logikách Méně běžné neklasické logiky jsou například modální logika S4.3, Visserova logika, nebo rozšíření logiky S4 o Grzegorczykův axiom.

10 Dobrá uspořádání v teoretické informatice Článek [1] uvažuje užití dobrých uspořádání k důkazům korektnosti algoritmů. Téma je od ostatních trochu vzdálené, ale na letmé prohlédnutí se mi zdálo, že článek je lehký a opravdu dobře napsaný. Logicky by toto téma mohlo patřit před Gentzenův důkaz bezespornosti aritmetiky.

[1] N. Dershowitz a Z. Manna. Proving termination with multiset orderings. *Communications of the ACM*, 22:465–476, 1979.

11 Matematická neúplnost v Peanově aritmetice Po dlouhou dobu byla Druhá Gödelova věta jediným zdrojem konkrétních tvrzení nezávislých na Peanově aritmetice. Až koncem sedmdesátých let 20. století byla nalezena *matematická* tvrzení nezávislá na PA. Slovo "matematický" je zde v protikladu k "logický"; tvrzení, že PA je bezesporná, lze označit za logické, kdežto matematická tvrzení mají být o číslech, nikoliv o důkazech sporu.

Jedním z matematických tvrzení nezávislých na PA je Paris-Harringtonův princip, který vznikl modifikací Ramseyovy věty. Název tohoto tématu je převzat z [2].

[1] R. Kaye. *Models of Peano Arithmetic.* Oxford University Press, 1991.

[2] J. B. Paris a L. Harrington. A mathematical incompleteness in Peano arithmetic. V J. Barwise, editor, *Handbook of Mathematical Logic*, kapitola D8. North-Holland, 1977.

12 Dodatky k intuicionistické logice Různé důkazy úplnosti výrokové logiky vůči kripkovské sémantice, zobecnění kripkovské sémantiky na predikátovou logiku, rozhodnutelnost výrokové logiky, interpretace klasické logiky v intuicionistické.

[1] R. Dyckhoff. Contraction-free sequent calculi for intuitionistic logic. *J. Symbolic Logic*, 57:795–807, 1992.

[2] V. Švejdar. On sequent calculi for intuitionistic propositional logic. *Comm. Math. Univ. Carolinae*, 47(1):159–173, 2006.

13 Pojem interpretace a interpretovatelnost axiomatických teorií Tvrzení tvaru *je-li teorie S bezesporná, je bezesporné i její rozšíření o axiom φ,* nebo obecněji *je-li teorie S bezesporná, je bezesporná i teorie T,* se říká tvrzení o relativní bezespornosti. Přirozenou metodou pro důkaz relativní bezespornosti je konstrukce interpretace (jedné teorie v druhé). Interpretovatelnost axiomatických teorií je zhruba od 70. let minulého století zajímavým předmětem výzkumu, k němuž významně přispěl Petr Hájek a další čeští logikové. Peanova aritmetika PA s dodatečným axiomem $\mathsf{Con}(\pi)$ není interpretovatelná v PA (věta 4.5.8 v mé knize), kdežto PA s dodatečným axiomem $\neg\mathsf{Con}(\pi)$ interpretovatelná je. Obě tvrzení lze chápat jako zobecnění druhé Gödelovy věty o neúplnosti.

14 Aplikace prostých množin v logice O tom je v knize [1] několik zmínek.

[1] P. Odifreddi. *Classical Recursion Theory.* North-Holland, Amsterdam, 1989.

15 Hilbertův program Smoryňského článek má asi 60 stránek, obsahuje zajímavé historické údaje a trochu i drby, není v něm skoro žádná matematika, ale je trochu náročnější na znalost angličtiny.

[1] C. Smoryński. Hilbert's programme. *CWI Quarterly*, 1(4), 1988.

16 Algoritmy s orákulem Orákulum pro množinu $B \subseteq \mathrm{N}$ je myšlená černá skříňka (nebo snad "periferní zařízení"), které rozhoduje o náležení do B. Množina A je turinovsky převeditelná na B, symbolicky $A \leq_{\mathrm{T}} B$, jestliže náležení do A lze rozhodovat algoritmem, který může využívat orákulum pro B. Když A je m-převeditelná na B, pak platí i $A \leq_{\mathrm{T}} B$.

Referát by mohl probrat různé (ekvivalentní) definice relace $\leq_{\mathrm{T}}$. Jednu z definicí lze postavit na tomto: A je *rekurzívně spočetná v B*, jestliže existuje množina $R \in \mathsf{RS}$ tak, že

$$A = \{\, x \,;\, \exists u \exists v (\langle x, u, v \rangle \in R \;\&\; D_u \subseteq B \;\&\; D_v \subseteq \overline{B}) \,\},$$

kde $\{\, D_u \,;\, u \in \mathrm{N} \,\}$ je enumerace všech konečných množin přirozených čísel. Dále by referát mohl zahrnout Friedberg-Mučnikovu větu (přehledný důkaz je v Rogersově knize a v práci [2]): existují RS množiny, které jsou turingovsky nesrovnatelné. Množiny turingovsky nesrovnatelné jsou ovšem nesrovnatelné i vůči m-převeditelnosti.

[1] F. Bártík. Alternativní definice Turingovské převeditelnosti. Ročníková práce, Filozofická fakulta Univerzity Karlovy, katedra logiky, 2007.

[2] A. Horská. Friedberg-Muchnikova veta. Ročníková práce, Filozofická fakulta Univerzity Karlovy, katedra logiky, 2007.

[3] H. Rogers, Jr. *Theory of Recursive Functions and Effective Computability.* McGraw-Hill, New York, 1967.

17 Neefektivnost rezolučního kalkulu Definujme délku výrokové formule jako počet všech výskytů výrokových atomů a logických spojek a uvažujme tvrzení tvaru *k výrokovému kalkulu* $\mathcal{C}$ *existuje polynom* p *tak, že každá výroková tautologie délky* n *má v kalkulu* $\mathcal{C}$ *důkaz, jehož délka je nejvýše* $p(n)$. Toto tvrzení lze chápat tak, že kalkulus $\mathcal{C}$ je efektivní. Všeobecně se soudí, že toto tvrzení je nepravdivé pro *každý* kalkulus $\mathcal{C}$, tj. že každý výrokový kalkulus je neefektivní. Dokázáno to ale není. Dokonce i pro běžně užívané kalkuly je toto tvrzení otevřeným problémem! Ve všech z následujících zdrojů lze nalézt Hakenův důkaz, že *rezoluční kalkulus* je neefektivní. Není tam žádná hluboká teorie, zato dost počítání se zlomky a s kombinačními čísly.

[1] A. Haken. The intractability of resolution. *Theoretical Comput. Sci.*, 39:297–305, 1985.

[2] S. R. Buss. Weak Formal Systems and Connections to Computational Complexity. Lecture Notes for a Topics Course, University of California, Berkeley, Jan.–May 1988.

[3] J. Walter. Neefektivnost rezolučního výrokového kalkulu. Ročníková práce, Filozofická fakulta University Karlovy, katedra logiky, 2000.

18 Další neefektivní kalkuly pro klasickou výrokovou logiku Další z mála kalkulů, o kterých je dokázáno, že jsou neefektivní, čili že některé tautologie v nich mají pouze velmi dlouhé důkazy, je gentzenovský výrokový kalkulus, ve kterém se nepřipouští pravidlo řezu a ve kterém se důkazy považují za stromy. To se cituje jako výsledek G. Takeutiho, přehledný důkaz lze vyčíst ze skripta [2] v předchozím tématu. T. Auer vypracoval jiný důkaz, že některé tautologie mají pouze velmi dlouhé důkazy. Tvrzení v jeho diplomové práci je trochu slabší než v Hakenově článku výše, ale důkaz je mnohem přehlednější a názornější.

[1] T. Auer. Složitost výrokových důkazů v rezoluci. Diplomová práce, Filozofická fakulta University Karlovy, katedra logiky, 2002.