Cvičení ke kursu *Vlastnosti axiomatických teorií* (4. února 2021)

Cvičení

1. Nechť P a Q jsou unární a R binární predikát. Dokažte, že následující sentence jsou logicky platné, ale obrátíme-li (vnější) implikaci, ve všech případech vznikne formule, která logicky platná není:

   $\exists x(P(x) \,\&\, Q(x)) \to \exists x P(x) \,\&\, \exists x Q(x)$,

   $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \to \forall x(P(x) \vee Q(x))$,

   $\exists x \forall y R(x,y) \to \forall y \exists x R(x,y)$,

   $\forall x(P(x) \to Q(x)) \to (\forall x P(x) \to \forall x Q(x))$,

   $\forall x(P(x) \to Q(x)) \to (\exists x P(x) \to \exists x Q(x))$.

2. Tutéž úlohu vyřešte i pro sentence $\forall x(P(x) \to \forall y P(y))$, $\exists x(P(x) \to \forall y P(y))$ a $\exists x(\exists y P(y) \to P(x))$.

3. U těch sentencí z předchozích dvou cvičení, které jsou logicky platné, zdůvodněte jejich dokazatelnost v hilbertovském kalkulu. Využijte tautologické důsledky a dokazatelnost tautologií, avšak obejděte se bez věty o úplnosti predikátového kalkulu.

4. Když Δ je množina formulí a φ a ψ jsou formule, pak $\Delta, \psi \models \varphi$, právě když $\Delta \models \psi \to \varphi$. Dokažte.

5. Teorie T a S jsou *ekvivalentní*, jestliže každý axiom teorie S vyplývá z T a zároveň každý axiom teorie T vyplývá z S. Dokažte, že T a S jsou ekvivalentní, právě když mají stejné modely (tj. každý model teorie T je zároveň modelem teorie S a naopak).

6. Nechť φ je formule v jazyce L. Uvažujte podmínky (i) existují termy $t_1, .., t_n$ jazyka L takové, že formule $\varphi_x(t_1) \vee \,..\, \vee \varphi_x(t_n)$ je logicky platná, a (ii) formule $\exists x \varphi$ je logicky platná. Zdůvodněte, že z (i) plyne (ii), ale opačné tvrzení (ii) $\Rightarrow$ (i) neplatí.

   Návod. Uvažujte jediný unární predikát P a formuli $P(x) \to \forall v P(v)$.

7. Tvrzení, že je-li navíc φ otevřená, pak z podmínky (ii) v předchozím cvičení plyne podmínka (i), platí, je známé jako Hilbertova-Ackermannova věta, ale v přednášce zmíněné nebylo. Zdůvodněte, že v této větě by se nedalo vystačit s jediným termem: je-li φ otevřená formule v jazyce L a formule $\exists x \varphi$ je

logicky platná, pak nemusí existovat term t jazyka L takový, že formule $\varphi_x(t)$ je logicky platná.

Návod. Uvažujte jazyk $\{P, F\}$ s unárním predikátem a unární funkcí, a vezměte formuli $P(x) \vee \neg P(F(x))$.

8. K formuli φ z návodu k předchozímu cvičení najděte termy $t_1, .., t_n$ jazyka L takové, že formule $\varphi_x(t_1) \vee \,..\, \vee \varphi_x(t_n)$ je logicky platná.

9. Nechť T je teorie s jazykem $\{\in\}$ s jediným binárním predikátem a s axiomy
$\forall x \forall y (\forall v (v \in x \equiv v \in y) \rightarrow x = y)$,
$\exists x \forall v \neg (v \in x)$,
$\forall x \forall y \exists z \forall v (v \in x \vee v = y \rightarrow v \in z)$.

   (a) Dokažte pomocí konečných modelů, že $\forall x (x \notin x)$ a $\neg \exists x \forall v (v \in x)$ jsou sentence nedokazatelné v T.
   (b) Dokažte, že žádný ze tří axiomů teorie T není dokazatelný z ostatních dvou.

10. Uvažujte teorii T s prázdným jazykem a prázdnou množinou axiomů. Popište všechny její modely. Najděte její rozšíření S v tomtéž (prázdném) jazyce, které je bezesporné, ale nemá žádné konečné modely.

11. Pro každou ze struktur $\langle \mathrm{N}, < \rangle$, $\langle \mathrm{Z}, < \rangle$ a $\langle \mathrm{Q}, < \rangle$ najděte sentenci, která v ní platí, ale neplatí v ostatních dvou. Lze také struktury $\mathbb{R}$ a $\mathbb{Q}$ odlišit platností nějaké sentence? A co struktury $\langle \mathrm{Z}, + \rangle$ a $\langle \mathrm{Q}, + \rangle$?

12. Dokažte, že struktury $\langle \mathrm{R}, < \rangle$ a $\langle \mathrm{R} - \{0\}, < \rangle$ spolu nejsou izomorfní. Dokažte, že ale jsou elementárně ekvivalentní.

    Návod. V první z nich má každá neprázdná shora omezená množina supremum. O druhé to pravda není. Obě struktury jsou modely téže úplné teorie.

13. Zdůvodněte s užitím Vaughtova testu, že teorie S z cvičení 10 je úplná.

14. Dokažte, že je-li teorie T ekvivalentní (ve smyslu cvičení 5) s nějakou konečnou množinou sentencí, pak je ekvivalentní i s vlastní konečnou podmnožinou. Vyvoďte z toho, že teorie z cvičení 10 není konečně axiomatizovatelná. Ani teorie SUCC není konečně axiomatizovatelná.

15. Dokažte že když třída $\mathcal{C}$ struktur pro určitý jazyk je axiomatizovatelná a její komplement $-\mathcal{C}$ (tj. třída všech struktur pro týž jazyk, které nejsou v $\mathcal{C}$) je také axiomatizovatelný, pak $\mathcal{C}$ a $-\mathcal{C}$ jsou dokonce konečně axiomatizovatelné.

16. Dokažte, že třída všech souvislých neorientovaných grafů, chápaná rovněž jako třída struktur pro jazyk s jedním binárním predikátem, není axiomatizovatelná.

17. Uvažujte třídu všech struktur $\langle D, P\rangle$ pro jazyk s jedním unárním predikátem takových, že P i $D - P$ jsou nekonečné. Dokažte, že tato třída je axiomatizovatelná. Je konečně axiomatizovatelná? Rozhodněte, pro která κ je příslušná teorie κ-kategorická.

18. Zdůvodněte, že teorie, která má jazyk $\{+, 0, \mathrm{S}\}$ a axiomy Q1–Q5 vzaté z Robinsonovy aritmetiky, je konzervativním rozšířením teorie s axiomy Q1–Q3 (které má Robinsonova aritmetika společné s teorií SUCC). Z tohoto faktu a nebo samostatnou úvahou zdůvodněte, že přidáním axiomů Q4 a Q5 k SUCC vznikne teorie, která je konzervativním rozšířením teorie SUCC.

19. Dokažte, že struktura $\langle \mathrm{N}, 0, \mathrm{s}\rangle + \langle \mathrm{Z}, \mathrm{s}\rangle$ nemá žádnou expanzi, která by byla modelem teorie $\mathrm{Th}(\langle \mathrm{N}, +, 0, \mathrm{s}\rangle)$.

    Návod. Sčítání v dané struktuře nelze definovat tak, aby platily sentence $\forall x \exists y (x = y + y \vee x = \mathrm{S}(y + y))$ a $\forall x \forall y \forall z (z + x = z + y \rightarrow x = y)$.

20. Dokažte, že každé přirozené číslo je definovatelným prvkem struktury $\langle \mathrm{N}, <\rangle$. Nechť dále R je relace $\{\, [a, b] \,;\, |a - b| = 1 \,\}$. Dokažte, že i ve struktuře $\langle \mathrm{N}, R\rangle$ je každé přirozené číslo definovatelným prvkem.

21. Uvažujte množinu $M = \mathrm{N} \cup \{a, b\}$ vzniklou přidáním dvou nových prvků a a b k množině všech přirozených čísel, a uvažujte dále prodloužení následnické funkce struktury $\mathbb{N}$ definované podmínkami $\mathrm{S}(a) = b$ a $\mathrm{S}(b) = a$. Dokažte, že sčítání a násobení struktury $\mathbb{N}$ lze (více způsoby) rozšířit na celou množinu M tak, aby ve výsledné struktuře platily všechny axiomy Robinsonovy aritmetiky Q.

22. Rozhodněte, zda následující sentence jsou dokazatelné v Robinsonově aritmetice Q:

    $\forall x (x \leq x)$
    $\forall x (x \leq 0 \rightarrow x = 0)$
    $\forall x (0 \leq x)$
    $\forall x (0 \cdot x = 0)$
    $\forall x (x \cdot \overline{1} = x)$
    $\forall x \forall y \exists z (x \leq z \;\&\; y \leq z)$
    $\forall x \neg (x < x)$
    $\forall x \forall y (x \leq y \rightarrow x < y \vee x = y)$
    $\forall x \forall y (x + y = 0 \rightarrow x = 0 \;\&\; y = 0)$
    $\forall x \forall y (x \leq y \equiv \mathrm{S}(x) \leq \mathrm{S}(y))$
    $\forall x \forall y (x < y \rightarrow x < \mathrm{S}(y))$
    $\forall x \forall y (\mathrm{S}(x) < y \rightarrow x < y)$
    $\forall x \forall y (x \cdot y = 0 \rightarrow x = 0 \vee y = 0)$
    $\forall x (x \leq \overline{1} \rightarrow x = 0 \vee x = \overline{1})$
    $\forall x \forall y \forall z ((z + y) + x = z + (y + x))$.

    Návod. Nedokazatelnost lze většinou dokázat vhodnou volbou operací v cvičení 21, a lze přitom vystačit s celkem dvěma modely.

23. Užijte Postovu větu k důkazu, že když X a Y jsou RE množiny přirozených čísel nebo k-tic řirozených čísel takové, že $X \cap Y = \emptyset$ a $X \cup Y$ je rekurzívní, pak X a Y jsou rekurzívní. Zdůvodněte, že sjednocením, průnikem a projekcí RE množin vznikne opět RE množina.

24. Dokažte, že rovnost $\mathrm{Thm}(T) = \bigcap\{\, \mathrm{Thm}(S)\ ;\ S$ je úplné rozšíření $T\,\}$ platí pro libovolnou teorii T. Na základě toho zdůvodněte, že když teorie T má pouze konečně mnoho navzájem neekvivalentních úplných rozšíření v tomtéž jazyce, a všechna jsou rozhodnutelná, pak T je rozhodnutelná. Takže, teorie vzniklá z teorie DNO odstraněním axiomů týkajících se největších a nejmenších objektů je rozhodnutelná.

25. Nechť T je rekurzívně axiomatizovatelné rozšíření Robinsonovy aritmetiky, které je formulované v aritmetickém jazyce a je korektní (tj. $\mathbb{N} \models T$). Rozhodněte, zda následující tvrzení platí.
   (a) Když φ a ψ jsou sentence a $T \vdash \varphi \vee \psi$, pak $T \vdash \varphi$ nebo $T \vdash \psi$.
   (b) Když φ a ψ jsou Σ_1-sentence a $T \vdash \varphi \vee \psi$, pak $T \vdash \varphi$ nebo $T \vdash \psi$.

   Návod. V (a) užijte První Gödelova větu. V (b) užijte větu o Σ-úplnosti zvlášť na φ a na ψ.

26. Ve stejné situaci rozhodněte, zda platí
   (a) Je-li $\exists x \varphi(x)$ aritmetická sentence taková, že $T \vdash \exists x \varphi(x)$, pak existuje číslo n splňující podmínku $T \vdash \varphi(\overline{n})$.
   (b) Je-li $\exists x \varphi(x)$ aritmetická sentence taková, že $T \vdash \exists x \varphi(x)$ a navíc $\varphi \in \Delta_0$, pak existuje číslo n splňující podmínku $T \vdash \varphi(\overline{n})$.

   Návod. V (a) vezměte formuli $\psi(y) \in \Delta_0$, pro kterou platí $\mathbb{N} \models \forall y \psi(y)$ a $T \nvdash \forall y \psi(y)$. Její existenci zaručuje První Gödelova věta. Dále uvažujte sentenci $\exists x \forall y (\psi(y) \vee \neg\psi(x))$.