Cvičení ke kursu *Neúplnost a Gödelovy věty* (24. května 2021)

Cvičení

1. Nechť T je teorie splňující předpoklady První Gödelovy věty a nechť σ je Σ_1-sentence nezávislá na T. Dokažte, že $(T+\sigma)$ není, ale $(T+\neg\sigma)$ je Σ_1-korektní.

2. Tvrzení, že každé sudé číslo větší než 3 je součtem dvou prvočísel, se nazývá Goldbachova domněnka a není o něm známo, zda je pravdivé. Dokažte, že je-li toto tvrzení nezávislé na PA, pak platí v $\mathbb{N}$.

3. Dokažte pomocí Löbových podmínek, že pokud T a τ splňují předpoklady Druhé Gödelovy věty, ν je Gödelova sentence a φ libovolná sentence, pak
$$\begin{aligned}&\mathsf{PA} \vdash \neg\mathrm{Con}(\tau) \to \mathrm{Pr}_\tau(\overline{\varphi}),\\ &\mathsf{PA} \vdash \nu \to \mathrm{Con}(\tau),\\ &\mathsf{PA} \vdash \mathrm{Con}(\tau) \to \neg\mathrm{Pr}_\tau(\overline{\mathrm{Con}(\tau)}).\end{aligned}$$

4. Dokažte za stále týchž předpokladů o T a τ, že sentence $\mathrm{Pr}_\tau(\overline{\varphi}) \to \varphi$ pro některé sentence φ dokazatelná je a pro některé není.

5. Nechť $\mathcal{M}$ je model Peanovy aritmetiky a nechť a je jeho nestandardní prvek. Pak množina $K = \{\, b \in M\ ;\ \exists n \in \mathrm{N}(b \leq a^{\overline{n}})\,\}$, kterou můžeme schématicky označit jako a^{N}, je uzavřená na operace, takže je nosnou množinou podstruktury $\mathcal{K}$ modelu $\mathcal{M}$. Dokažte, že identická funkce na K zachovává všechny Δ_0-formule, tj. že $\mathcal{K}$ je Δ_0-elementární podstrukturou modelu $\mathcal{M}$. Z toho, že mocnina (se základem 2) je Δ_0-definovatelná, vyvoďte, že $K \neq M$.

6. Dokažte, že když u a v jsou vyvážená podslova slova w a nejlevější znak slova v je uvnitř u, pak v je podslovo slova u.

7. O každém z následujících schémat rozhodněte, zda je intuicionisticky tautologické:

$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$,	$A \vee \neg A \to (\neg\neg A \to A)$,
$(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$,	$\neg\neg A \vee (\neg\neg A \to A)$,
$(\neg\neg A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$,	$(A \to \neg\neg B) \to (\neg\neg A \to \neg\neg B)$,
$(A \to B) \vee (B \to A)$,	$(A \to \neg\neg B) \to \neg\neg(A \to B)$,
$\neg(A \to B) \to \neg B$,	$\neg\neg(A \to B) \to (A \to \neg\neg B)$,
$\neg(A \to B) \to A$,	$A \,\&\, (B \vee C) \to (A \,\&\, B) \vee (A \,\&\, C)$,

$\neg(A \to B) \to \neg\neg A,$ $\quad$ $A \vee (B \,\&\, C) \to (A \vee B) \,\&\, (A \vee C),$

$(A \to B) \to ((\neg A \to B) \to B),$ $\quad$ $A \to (B \vee C) \to (A \to B) \vee (A \to C),$

$(A \to B) \to (\neg\neg A \to \neg\neg B),$ $\quad$ $\neg\neg(A \,\&\, B) \equiv (\neg\neg A \,\&\, \neg\neg B),$

$\neg A \vee \neg\neg A,$ $\quad$ $\neg\neg(\neg\neg A \to A).$

8. *Kořen* kripkovského rámce definujme jako vrchol, z něhož jsou dosažitelné všechny vrcholy rámce. Zdůvodněte, že není-li výroková formule intuicionistickou tautologií, pak je nesplněna v kořenu určitého kripkovského modelu.

9. *Amalgamace* jako operace fungující na rámcech s kořenem je definována následovně. Jsou-li $K_1, .., K_n$ rámce s kořeny $r_1, .., r_n$, pak z nich utvořený rámec K sestává z disjunktního sjednocení rámců $K_1, .., K_n$ a jednoho dodatečného vrcholu r, z něhož jsou dosažitelné všechny $r_1, .., r_n$ (takže vůbec všechny vrcholy rámce K, takže r je v K kořenem). Zdůvodněte pomocí amalgamace, že když $A \vee B$ je intuicionistická tautologie, pak některá z formulí A a B je intuicionistická tautologie.

10. Formule je *harropovská*, jestliže každý výskyt spojky $\vee$ se v ní nachází v rozsahu nějaké negace nebo v "levém rozsahu" nějaké implikace. Takže například každá formule začínající negací je harropovská, kdežto $r \to p \vee q$ harropovská není. Zdůvodněte, že je-li K rámec s kořenem r sestrojený amalgamací z rámců $K_1, .., K_n$ s kořeny $r_1, .., r_n$, pak z K lze vhodnou volbou pravdivostních hodnot atomů v r získat model, který má tuto vlastnost: každá harropovská formule je splněna v r, právě když je splněna ve všech $r_1, .., r_n$.

11. S užitím předchozího cvičení dokažte toto: když Γ je množina harropovských formulí a $A \vee B$ intuicionisticky vyplývá z Γ, pak některá z formulí A a B intuicionisticky vyplývá z Γ.

12. Zdůvodněte, že přestože množina $\{(\neg\neg p \to p) \to (p \vee \neg p)\}$ není množinou harropovských formulí, tvrzení z přechozího cvičení pro ni platí také (nevadí, když se atom p vyskytuje v disjunkci $A \vee B$).

    Návod. Amalgamaci aplikujte ne na dva, ale na tři modely, přičemž třetí je protipříklad na formuli $\neg\neg p \to p$.