Cvičení ke kursu *Neúplnost a Gödelovy věty* (2. května 2024)

Cvičení

1. Dokažte, že každá rekurzívní množina je m-převeditelná na každou množinu, která je neprázdná a má neprázdný komplement. Zdůvodněte, že když A je m-převeditelná na $\emptyset$, pak $A = \emptyset$, a když A je m-převeditelná na N, pak $A = \mathrm{N}$.

2. Užijte fakt, že každá rozhodnutelná bezesporná teorie má rozhodnutelné zúplnění, a dokažte, že libovolná teorie T je podstatně nerozhodnutelná, právě když je podstatně neúplná.

3. Nechť $Y \subseteq \mathrm{N}$ je RE nerekurzívní množina. Zdůvodněte, že $X = \{ 2n\,;\, n \in Y \}$ je také RE a nerekurzívní. Uvažujte jazyk $\{0, \mathrm{S}, P\}$, kde P je unární predikát. Nechť T je teorie, jejíž množina axiomů je $\mathsf{SUCC} \cup \{ P(\overline{n})\,;\, n \in X \}$. Nechť S je $(T + \forall x P(x))$. Která z teorií T a S je rekurzívně axiomatizovatelná? Která z nich je konzervativním rozšířením teorie SUCC? Která z nich je úplná? A která z nich je rozhodnutelná?

   Návod. Zdůvodněte, že například sentence $\exists x(P(x) \,\&\, P(\mathrm{S}(x)))$ je nezávislá na T. Dále zdůvodněte, že S připouští eliminaci kvantifikátorů.

4. Nechť T_1 je teorie $\mathsf{Q} - \{\mathrm{Q1}\}$ a nechť T_2 je teorie $\mathsf{Q} - \{\mathrm{Q2}\}$. Zdůvodněte, že jak T_1, tak T_2 má konečný (dokonce velmi malý) model. Vyvoďte z toho, že ani jedna z těchto teorií není podstatně nerozhodnutelná.

5. Dokažte, že když graf funkce $f : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ je Δ_0-definovatelný, pak existuje Δ_0-formule $\gamma(y, x)$, která funkci f *slabě reprezentuje* v tom smyslu, že:

   $$\forall n \forall m (m = f(n) \;\Rightarrow\; \mathsf{Q} \vdash \forall y(\gamma(y, \overline{n}) \;\equiv\; y = \overline{m})).$$

6. Z toho, že autoreferenční rovnice tvaru $\mathsf{Q} \vdash \varphi \equiv \psi(\overline{\varphi})$ má řešení pro každou formuli $\psi(x)$, vyvoďte, že i rovnice tvaru $\mathsf{Q} \vdash \varphi \equiv \psi(\overline{\varphi}, \overline{\neg\varphi})$ má řešení pro každou formuli $\psi(x_1, x_2)$. Tento fakt je dále použit ve cvičeních 13 a 14.

   Návod. Nechť $\gamma(y, x)$ slabě reprezentuje funkci $\alpha \mapsto \neg\alpha$ (tj. funkci, která k libovolnému textovému řetězci připíše na začátek negaci). Pracujte s formulí $\exists y(\psi(x, y) \,\&\, \gamma(y, x))$.

7. Nechť T je teorie splňující předpoklady První Gödelovy věty a nechť σ je Σ_1-sentence nezávislá na T. Dokažte, že $(T + \sigma)$ není, ale $(T + \neg\sigma)$ je Σ_1-korektní.

8. Tvrzení, že každé sudé číslo větší než 3 je součtem dvou prvočísel, se nazývá Goldbachova domněnka a není o něm známo, zda je pravdivé. Dokažte, že je-li toto tvrzení nezávislé na PA, pak platí v $\mathbb{N}$.

9. Nechť $\mathcal{M}$ je model Peanovy aritmetiky a nechť a je jeho nestandardní prvek. Pak množina $K = \{\, b \in M \;;\; \exists n \in \mathrm{N}(b \leq a^{\overline{n}})\,\}$, kterou můžeme schématicky označit jako a^{N}, je uzavřená na operace, takže je nosnou množinou podstruktury $\mathcal{K}$ modelu $\mathcal{M}$. Dokažte, že identická funkce na K zachovává všechny Δ_0-formule, tj. že $\mathcal{K}$ je Δ_0-elementární podstrukturou modelu $\mathcal{M}$. Z toho, že mocnina (se základem 2) je Δ_0-definovatelná, vyvoďte, že $K \neq M$.

10. Nechť T je bezesporné rozšíření PA, nechť $\tau(z) \in \Sigma$ je definice množiny T a nechť ν je řešení rovnice $T \vdash \nu \equiv \neg\mathsf{Pr}_\tau(\overline{\nu})$. Dokažte, že pak $\mathsf{PA} \vdash \nu \rightarrow \mathrm{Con}(\tau)$. Vyvoďte z toho, že $T \nvdash \mathsf{Con}(\tau) \rightarrow \neg\mathsf{Pr}_\tau(\overline{\neg\nu})$.

11. Nechť $\pi^*(z)$ je formule $\pi(z)\ \&\ \mathsf{Con}(\pi)$. Dokažte podrobně, že $\pi^*(z)$ je definice PA v $\mathbb{N}$ a že $\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Con}(\pi^*)$. Proč tento fakt není ve sporu s Druhou Gödelovou větou?

12. Nechť $\tau(z)$ je formule $\pi(z) \vee \exists y{<}z\, \mathsf{Proof}_\pi(\overline{\neg\mathsf{Con}(\pi)}, y)$. Ověřte, že $\tau(z)$ je Δ_0-definice PA v $\mathbb{N}$. Axiomy PA popisuje jako všechny axiomy teorie π plus všechny sentence větší než nejmenší důkaz sentence $\overline{\neg\mathsf{Con}(\pi)}$, pokud takové důkazy existují. Dokažte, že $\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Pr}_\pi(\overline{\neg\mathsf{Con}(\pi)}) \rightarrow \neg\mathsf{Con}(\tau)$. Vyvoďte z toho, že $\mathsf{PA} \nvdash \mathsf{Con}(\pi) \rightarrow \mathsf{Con}(\tau)$. Jinak by totiž sentence $\mathsf{Con}(\pi + \overline{\mathsf{Con}(\pi)})$, která je PA-ekvivalentní s $\neg\mathsf{Pr}_\pi(\overline{\neg\mathsf{Con}(\pi)})$, byla dokazatelná v $(\mathsf{PA} + \mathsf{Con}(\pi))$.

13. Nechť T je rozšíření Q a nechť $\tau(z) \in \Delta_0$ je definice množiny T v $\mathbb{N}$. Zdůvodněte podrobně, že jak sentence $0 = 0$, tak sentence $0 \neq 0$ je řešením autoreferenční rovnice $T \vdash \varphi \equiv \forall y(\mathsf{Proof}_\tau(\overline{\neg\varphi}, y) \rightarrow \exists v{\leq}y\, \mathsf{Proof}_\tau(\overline{\varphi}, v))$.

14. Nechť T je bezesporné rozšíření PA, nechť $\tau(z) \in \Delta_0$ definuje T v $\mathbb{N}$ a nechť ρ je řešení rovnice $T \vdash \rho \equiv \forall y(\mathsf{Proof}_\tau(\overline{\rho}, y) \rightarrow \exists v{\leq}y\, \mathsf{Proof}_\tau(\overline{\neg\rho}, v))$. Dokažte, že $\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Con}(\tau) \rightarrow \neg\mathsf{Pr}_\tau(\overline{\rho})\,\&\,\neg\mathsf{Pr}_\tau(\overline{\neg\rho})$, neboli že důkaz nezávislosti sentence ρ lze formalizovat v PA.

   Návod. Stačilo by předpokládat, že T je rozšíření Q, ale důkaz by byl obtížnější. Nechť σ je pomocná sentence $\exists v(\mathsf{Proof}_\tau(\overline{\neg\rho}, v)\ \&\ \forall y{<}v\, \neg\mathsf{Proof}_\tau(\overline{\rho}, y))$. Pro sentenci σ platí $T \vdash \sigma \rightarrow \rho$, což je jedna z věcí, se kterými by v Q byla potíž. Dále využijte, že $\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Pr}_\tau(\overline{\sigma \rightarrow \rho})$, $\mathsf{PA} \vdash \sigma \rightarrow \mathsf{Pr}_\tau(\overline{\sigma})$ a $\mathsf{PA} \vdash \neg\rho \rightarrow \mathsf{Pr}_\tau(\overline{\neg\rho})$.