Cvičení ke kursu *Neúplnost a Gödelovy věty* (25. května 2026)

Cvičení

1. Dokažte, že každá rekurzívní množina je m-převeditelná na každou množinu, která je neprázdná a má neprázdný komplement. Zdůvodněte, že když A je m-převeditelná na $\emptyset$, pak $A = \emptyset$, a když A je m-převeditelná na N, pak $A = \mathrm{N}$.

2. Užijte fakt, že každá rozhodnutelná bezesporná teorie má rozhodnutelné zúplnění, a dokažte, že libovolná teorie T je podstatně nerozhodnutelná, právě když je podstatně neúplná.

3. Nechť T_1 je teorie $\mathsf{Q} - \{\mathrm{Q1}\}$ a nechť T_2 je teorie $\mathsf{Q} - \{\mathrm{Q2}\}$. Zdůvodněte, že jak T_1, tak T_2 má konečný (dokonce velmi malý) model. Vyvoďte z toho, že ani jedna z těchto teorií není podstatně nerozhodnutelná.

4. Dokažte, že když graf funkce $f : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ je Δ_0-definovatelný, pak existuje Δ_0-formule $\gamma(y, x)$, která funkci f *slabě reprezentuje* v tom smyslu, že:
$$\forall n \forall m (m = f(n) \;\Rightarrow\; \mathsf{Q} \vdash \forall y(\gamma(y, \overline{n}) \;\equiv\; y = \overline{m})).$$

5. Z toho, že autoreferenční rovnice tvaru $\mathsf{Q} \vdash \varphi \equiv \psi(\overline{\varphi})$ má řešení pro každou formuli $\psi(x)$, vyvoďte, že i rovnice tvaru $\mathsf{Q} \vdash \varphi \equiv \psi(\overline{\varphi}, \overline{\neg\varphi})$ má řešení pro každou formuli $\psi(x_1, x_2)$. Tento fakt je dále použit ve cvičeních 12 a 13.

   Návod. Nechť $\gamma(y, x)$ slabě reprezentuje funkci $\alpha \mapsto \neg\alpha$ (tj. funkci, která k libovolnému textovému řetězci připíše na začátek negaci). Pracujte s formulí $\exists y(\psi(x, y) \,\&\, \gamma(y, x))$.

6. Nechť T je teorie splňující předpoklady První Gödelovy věty a nechť σ je Σ_1-sentence nezávislá na T. Dokažte, že $(T + \sigma)$ není, ale $(T + \neg\sigma)$ je Σ_1-korektní.

7. Tvrzení, že každé sudé číslo větší než 3 je součtem dvou prvočísel, se nazývá Goldbachova domněnka a není o něm známo, zda je pravdivé. Dokažte, že je-li toto tvrzení nezávislé na PA, pak v $\mathbb{N}$ platí.

8. Nechť $\mathcal{M}$ je model Peanovy aritmetiky a nechť a je jeho nestandardní prvek. Pak množina $K = \{\, b \in M \,;\, \exists n \in \mathrm{N}(b \leq a^{\overline{n}}) \,\}$, kterou můžeme schématicky označit jako a^{N}, je uzavřená na operace, takže je nosnou množinou podstruktury $\mathcal{K}$ modelu $\mathcal{M}$. Dokažte, že identická funkce na K zachovává všechny Δ_0-formule, tj. že $\mathcal{K}$ je Δ_0-elementární podstrukturou modelu $\mathcal{M}$. Z toho, že mocnina (se základem 2) je Δ_0-definovatelná, vyvoďte, že $K \neq M$.

9. Nechť T je bezesporné rozšíření PA, nechť $\tau(z) \in \Sigma$ je definice množiny T a nechť ν je řešení rovnice $T \vdash \nu \equiv \neg \mathsf{Pr}_\tau(\overline{\nu})$. Dokažte, že pak $\mathsf{PA} \vdash \nu \to \mathrm{Con}(\tau)$. Vyvoďte z toho, že $T \nvdash \mathsf{Con}(\tau) \to \neg \mathsf{Pr}_\tau(\overline{\neg\nu})$.

10. Nechť $\pi^*(z)$ je formule $\pi(z)$ & $\mathsf{Con}(\pi)$. Dokažte podrobně, že $\pi^*(z)$ je definice PA v $\mathbb{N}$ a že $\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Con}(\pi^*)$. Proč tento fakt není ve sporu s Druhou Gödelovou větou?

11. Nechť $\tau(z)$ je formule $\pi(z) \vee \exists y{<}z\, \mathsf{Proof}_\pi(\overline{\neg \mathsf{Con}(\pi)}, y)$. Ověřte, že $\tau(z)$ je Δ_0-definice PA v $\mathbb{N}$. Axiomy PA popisuje jako všechny axiomy teorie π plus všechny sentence větší než nejmenší důkaz sentence $\overline{\neg \mathsf{Con}(\pi)}$, pokud takové důkazy existují. Dokažte, že $\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Pr}_\pi(\overline{\neg \mathsf{Con}(\pi)}) \to \neg \mathsf{Con}(\tau)$. Vyvoďte z toho, že $\mathsf{PA} \nvdash \mathsf{Con}(\pi) \to \mathsf{Con}(\tau)$. Jinak by totiž sentence $\mathsf{Con}(\pi + \overline{\mathsf{Con}(\pi)})$, která je PA-ekvivalentní s $\neg \mathsf{Pr}_\pi(\overline{\neg \mathsf{Con}(\pi)})$, byla dokazatelná v $(\mathsf{PA} + \mathsf{Con}(\pi))$.

12. Nechť T je rozšíření Q a nechť $\tau(z) \in \Delta_0$ je definice množiny T v $\mathbb{N}$. Zdůvodněte podrobně, že jak sentence $\perp$ (tj. sentence $0 \neq 0$, není-li $\perp$ základním symbolem) tak sentence $\top$ (tj. $0 = 0$) je řešením autoreferenční rovnice $T \vdash \varphi \equiv \forall y(\mathsf{Proof}_\tau(\overline{\neg\varphi}, y) \to \exists v{\le}y\, \mathsf{Proof}_\tau(\overline{\varphi}, v))$. Z toho je jasné, že obecná věta o jednoznačné řešitelnosti autoreferenčních rovnic neplatí.

    Návod. Existuje m, pro které platí $\mathbb{N} \models \mathsf{Proof}_\tau(\overline{\top}, \overline{m})$ a $\mathsf{Q} \vdash \mathsf{Proof}_\tau(\overline{\top}, \overline{m})$. Na druhé straně, pro každé k platí $\mathbb{N} \not\models \mathsf{Proof}_\tau(\overline{\perp}, \overline{k})$ a $\mathsf{Q} \vdash \neg\mathsf{Proof}_\tau(\overline{\perp}, \overline{k})$. Použite schéma, které pro každé m tvrdí, že $\overline{m}$ je srovnatelné s každým y.

13. Nechť T je bezesporné rozšíření PA, nechť $\tau(z) \in \Delta_0$ definuje T v $\mathbb{N}$ a nechť ρ je řešení rovnice $T \vdash \rho \equiv \forall y(\mathsf{Proof}_\tau(\overline{\rho}, y) \to \exists v{\le}y\, \mathsf{Proof}_\tau(\overline{\neg\rho}, v))$. Dokažte, že $\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Con}(\tau) \to \neg \mathsf{Pr}_\tau(\overline{\rho}) \& \neg \mathsf{Pr}_\tau(\overline{\neg\rho})$, neboli že důkaz nezávislosti sentence ρ lze formalizovat v PA. Této rovnici se říká *Rosserova rovnice* a její řešení je *Rosserova sentence* (teorie T).

    Návod. Stačilo by předpokládat, že T je rozšíření Q, ale důkaz by byl obtížnější. Nechť σ je pomocná sentence $\exists v(\mathsf{Proof}_\tau(\overline{\neg\rho}, v) \,\&\, \forall y{<}v\, \neg \mathsf{Proof}_\tau(\overline{\rho}, y))$. Pak $T \vdash \sigma \to \rho$, což je jedna z věcí, se kterými by v Q byla potíž. Dále využijte, že $\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Pr}_\tau(\overline{\sigma \to \rho})$, $\mathsf{PA} \vdash \sigma \to \mathsf{Pr}_\tau(\overline{\sigma})$ a $\mathsf{PA} \vdash \neg\rho \to \mathsf{Pr}_\tau(\overline{\neg\rho})$.

14. Navrhněte dvě dodatečná pravidla kalkulu GK pro případ, že i spojka $\equiv$ se považuje za základní symbol. Pravidla mají mít vlastnost podformulí (*subformula property*) a mají být obráceně korektní (čemuž se někdy říká, že jsou *invertibilní*). Pro výsledný kalkulus pak platí věta o úplnosti a věta o eliminovatelnosti řezů.

15. Pro každé z následujících schémat nalezněte důkaz v kalkulu GJ, nebo kripkovský protipříklad na některou instanci:

    $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$, $\quad A \vee \neg A \to (\neg\neg A \to A)$,

    $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$, $\quad \neg\neg A \vee (\neg\neg A \to A)$,

$(\neg\neg A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$,
$(A \to B) \vee (B \to A)$,
$\neg(A \to B) \to \neg B$,
$\neg(A \to B) \to A$,
$\neg(A \to B) \to \neg\neg A$,
$(A \to B) \to ((\neg A \to B) \to B)$,
$(A \to B) \to (\neg\neg A \to \neg\neg B)$,
$\neg A \vee \neg\neg A$,
$(\neg A \vee \neg\neg A \to A) \to A$.
$(A \to \neg\neg B) \to (\neg\neg A \to \neg\neg B)$,
$(A \to \neg\neg B) \to \neg\neg(A \to B)$,
$\neg\neg(A \to B) \to (A \to \neg\neg B)$,
$A \mathbin{\&} (B \vee C) \to (A \mathbin{\&} B) \vee (A \mathbin{\&} C)$,
$A \vee (B \mathbin{\&} C) \to (A \vee B) \mathbin{\&} (A \vee C)$,
$A \to (B \vee C) \to (A \to B) \vee (A \to C)$,
$\neg\neg(A \mathbin{\&} B) \equiv (\neg\neg A \mathbin{\&} \neg\neg B)$,
$\neg\neg(\neg\neg A \to A)$,

Předpokládáme, že & a $\vee$ mají vyšší prioritu než $\to$, takže například u poslední formule není nutné psát závorku okolo $\neg A \vee \neg\neg A$.

16. *Kořen* kripkovského rámce definujme jako vrchol, z něhož jsou dosažitelné všechny vrcholy rámce. Zdůvodněte, že není-li výroková formule intuicionistickou tautologií, pak je nesplněna v kořenu určitého kripkovského modelu.

17. *Amalgamace* jako operace fungující na rámcích s kořenem je definována následovně. Jsou-li $K_1, .., K_n$ rámce s kořeny $b_1, .., b_n$, pak z nich utvořený rámec K sestává z disjunktního sjednocení rámců $K_1, .., K_n$ a jednoho dodatečného vrcholu a, z něhož jsou dosažitelné všechny $b_1, .., b_n$ (takže jsou z něj dosažitelné vůbec všechny vrcholy rámce K, takže a je v K kořenem). Zdůvodněte pomocí amalgamace, že když $A \vee B$ je intuicionistická tautologie, pak alespoň jedna z formulí A a B je intuicionistická tautologie.

18. Formule je *harropovská*, jestliže každý výskyt spojky $\vee$ se v ní nachází v rozsahu nějaké negace nebo v "levém rozsahu" nějaké implikace. Takže například $r \to p \vee q$ není harropovská formule. Když $A \to B$ je harropovská, pak B musí být harropovská, ale A nemusí. Zdůvodněte, že je-li K rámec s kořenem a sestrojený amalgamací z rámců $K_1, .., K_n$ s kořeny $b_1, .., b_n$, pak z K lze vhodnou volbou pravdivostních hodnot atomů v a získat model, který má tuto vlastnost: každá harropovská formule je splněna v a, právě když je splněna ve všech $b_1, .., b_n$.

19. S užitím předchozího cvičení dokažte toto: když Γ je množina harropovských formulí a $A \vee B$ intuicionisticky vyplývá z Γ, tj. je v každém modelu splněna ve všech vrcholech, ve kterých jsou splněny všechny formule z Γ, pak alespoň jedna z formulí A a B intuicionisticky vyplývá z Γ.

20. Zdůvodněte, že přestože množina $\{(\neg\neg p \to p) \to (p \vee \neg p)\}$ není množinou harropovských formulí, tvrzení z přechozího cvičení pro ni platí také (a nevadí při tom, když se atom p vyskytuje v disjunkci $A \vee B$).

    Návod. Amalgamaci aplikujte ne na dva, ale na tři modely, přičemž třetí je protipříklad na formuli $\neg\neg p \to p$.

21. Sekventový kalkulus pro logiku K4 lze získat přidáním jediného (žádné levé pravidlo potřeba není) modálního pravidla $\langle\, \Gamma, \Box\Gamma \;\Rightarrow\; A \,\rangle \;/\; \langle\, \Box\Gamma \;\Rightarrow\; \Box A \,\rangle$ ke kalkulu GK. Podobně jako pravidla $\to$rI a $\neg$rI kalkulu GJ, toto pravidlo nepřipouští postranní formule. Zdůvodněte, že výsledný kalkulus je korektní vůči kripkovské sémantice logiky K4: je-li R tranzitivní a sekvent $\langle\, \Gamma, \Box\Gamma \;\Rightarrow\; A \,\rangle$ platí ve všech vrcholech modelu $\langle W, R, \Vdash\rangle$ (v tom smyslu, že kdykoliv jsou v některém vrcholu splněny všechny formule z množiny $\Gamma \cup \Box\Gamma$, pak je v něm splněna i formula A), pak i sekvent $\langle\, \Box\Gamma \;\Rightarrow\; \Box A \,\rangle$ platí ve všech vrcholech.

22. Dokažte, že kalkulus z přechozího cvičení je úplný vůči sémantice logiky K4 (tj. vůči třídě všech modelů $\langle W, R, \Vdash\rangle$, kde R je tranzitivní).

    Návod. Modifikujte důkaz pro kalkulus GJ. Na definici, že sekvent je *relevantní*, jestliže je sestaven z podformulí formulí v sekventu $\langle\, \Sigma \;\Rightarrow\; \Omega \,\rangle$ a nemá bezřezový důkaz, se nemusí nic měnit. Sekvent $\langle\, \Gamma \;\Rightarrow\; \Delta \,\rangle$ je *saturovaný*, jestliže pro něj platí

    - když $B \,\&\, C$ je v Γ nebo $B \vee C$ je v Δ, pak B i C je v Γ resp. v Δ,
    - když $B \vee C$ je v Γ nebo $B \,\&\, C$ je v Δ, pak B nebo C je v Γ (v Δ),
    - když $B \to C$ je v Γ, pak B je v Δ nebo C je v Γ,
    - když $B \to C$ je v Δ, pak B je v Γ a C je v Δ,

    (i zde předpokládáme, že $\neg A$ je zkratka pro $A \to \bot$). *Lemma 1* pak platí ve stejném tvaru jako v intuicionistické logice: pro každý relevantní sekvent $\langle\, \Gamma \;\Rightarrow\; \Delta \,\rangle$ existuje relevantní saturovaný sekvent $\langle\, \Pi \;\Rightarrow\; \Lambda \,\rangle$ takový, že $\Gamma \subseteq \Pi$ a $\Delta \subseteq \Lambda$. *Relace R* na množině W všech relevantních saturovaných sekventů se definuje takto: $\langle\, \Gamma \;\Rightarrow\; \Delta \,\rangle \; R \; \langle\, \Pi \;\Rightarrow\; \Lambda \,\rangle$, právě když pro každou formuli $\Box B \in \Gamma$ platí $\{B, \Box B\} \subseteq \Pi$. *Lemma 2* pak platí ve stejném tvaru jako v intuicionistické logice.

23. Relace R na množině W je *obráceně fundovaná* (*reversely well-founded*), jestliže pro každou neprázdnou množinu $X \subseteq W$ existují vrcholy $x \in X$ takové, že z x není dosažitelný žádný prvek množiny X. Dokažte, že *tranzitivní* relace R na *konečné* množině W je obráceně fundovaná, právě když je antireflexivní (*irreflexive*, tj. platí pro ni $\forall x \neg(x \; R \; x)$).

24. Dokažte, že je-li R tranzitivní a obrácené fundovaná, pak ve $\langle W, R, \Vdash\rangle$ platí všechny formule tvaru $\Box(\Box A \to A) \to \Box A$, tj. všechny instance *Löbova schématu.*

25. Dokažte, že přidáme-li k hilbertovskému kalkulu logiky K Löbovo schéma, ve výsledném kalkulu jsou dokazatelné všechny instance schématu 4.

    Návod. Nejprve dokažte, že $\Box(A \& B)$ je K-ekvivalentní s $\Box A \& \Box B$. Aplikujte Löbovo schéma na formuli $A \,\&\, \Box A$.