Cvičení k *Úvodu do neklasických logik* (12. listopadu 2026)

Cvičení

1. Formule A je *tautologickým důsledkem* množiny formulí Γ, což píšeme $\Gamma \models A$, jestliže ji splňuje každé pravdivostní ohodnocení, které splňuje všechny formule v Γ, tj. jestliže $\forall v(\forall D{\in}\Gamma(v(D) = 1) \Rightarrow v(a) = 1)$. Zdůvodněte na základě této definice, že (i) každý prvek množiny Γ je jejím tautologickým důsledkem, (ii) každá tautologie je tautologickým důsledkem každé množiny a (iii) formule, která je tautologickým důsledkem prázdné množiny, je tautologie.

2. Uvažujte množinu předpokladů tvaru $\Gamma \cup \{B\}$, neboli sjednocení množiny Γ s jednoprvkovou množinou $\{B\}$. Zdůvodněte podrobně, že $\Gamma \cup \{B\} \models A$, právě když $\Gamma \models B \to A$. Všimněte si, že tato ekvivalence platí bez ohledu na to, jestli $B \in \Gamma$, a že počet prvků množiny Γ nehraje žádnou roli.

3. Užijte předchozí dvě cvičení a zdůvodněte, že je-li formule A tautologickým důsledkem množiny $\{B_1, \ldots, B_m\}$ a všechny B_i jsou dokazatelné v hilbertovském kalkulu logiky K (nebo jiné modální logiky, nebo predikátové logiky), pak i A je dokazatelná.

4. Zdůvodněte podrobně, že všechny formule tvaru $\Box(A \,\&\, B) \to \Box A \,\&\, \Box B$ a $\Box A \& \Box B \to \Box(A \& B)$ jsou dokazatelné v logice K. Také $\Box\Box A \& \Box\neg\Box A \to \Box\bot$ je vždy dokazatelná. Každá formule tvaru $\Box(A \to \neg\Box A) \to (\Box A \to \Box\bot)$ je dokazatelná v logice K4.

5. Uvažujte kripkovský model $\langle W, R, \Vdash\rangle$ z knihy [BvBW07]: $W = \{1, 2, 3, 4\}$, relace dosažitelnosti R je $\{[1, 3], [1, 4], [2, 1], [4, 2], [4, 4]\}$ a atom p je splněn ve vrcholech 1 a 2. Určete, ve kterých vrcholech je splněna formule $\Diamond\Box\Diamond p$.

6. Zdůvodněte, že formuli $\neg\Box\bot \to \neg\Box\neg\Box\bot$ nelze dokázat v logice S5.

7. Určete charakteristické třídy logik $\mathrm{K} + 5$ a $\mathrm{K} + \neg\Box\bot \to \neg\Box\neg\Box\bot$.

Reference

[BvBW07] P. Blackburn, J. F. A. K. van Benthem a F. Wolter, ed. *Handbook of Modal Logic*. Elsevier, 2007.

[dJV88] D. H. J. de Jongh a F. Veltman. Intensional Logic. Skriptum, Philosophy Department, University of Amsterdam, Amsterdam, 1988.