Cvičení ke kursu *Vyčíslitelnost*, část II

(7. dubna 2012)

1. (a) Použijte diagonální metodu k důkazu, že neexistuje spojitá reálná funkce dvou proměnných $u : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ taková, že každou spojitou funkci f jedné proměnné lze získat dosazením vhodné konstanty za první proměnnou funkce u.
   (b) Rozhodněte, zda existuje rekurzívní funkce dvou proměnných, ze které lze každou rekurzívní funkci jedné proměnné získat dosazením vhodné konstanty za první proměnnou.
   (c) Rozhodněte, zda existuje reálná funkce dvou proměnných $u : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ taková, že každou spojitou funkci $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ lze získat dosazením vhodné konstanty za první proměnnou funkce u.

   Návod. Bod (c) je pro znalce kardinální aritmetiky. Stanovte mohutnost množiny všech spojitých reálných funkcí jedné proměnné. Užijte přitom fakt, že spojitá funkce je určena svými hodnotami na racionálních číslech.

2. Musí být funkce f primitivně rekurzívní, jestliže má primitivně rekurzívní graf, je totální a platí $\mathrm{Rng}(f) \subseteq \{0, 1\}$?

   Návod. Funkci f lze odvodit větvením podle primitivně rekurzívní podmínky.

3. Pokud částečná funkce je omezená konstantou a má rekurzívní graf, musí mít rekurzívní definiční obor?

4. (a) Je-li obecně rekurzívní funkce f jedné proměnné prostá a *na*, pak i k ní inverzní funkce f^{-1} je obecně rekurzívní. Dokažte.
   (b) Ke každé částečně rekurzívní funkci α jedné proměnné existuje částečně rekurzívní funkce β taková, že $\mathrm{Dom}(\beta) = \mathrm{Rng}(\alpha)$ a pro každé číslo $x \in \mathrm{Dom}(\beta)$ platí $\alpha(\beta(x)) = x$.

   Návod. V (b) použijte větu o normální formě. Nechť e je index funkce α. Číslo y takové, že $\alpha(y) = x$, lze nalézt probíráním všech čísel $\langle y, w\rangle$ a testováním, zda $\mathrm{T}(e, y, w)$.

5. Nechť pro funkce f a g jedné proměnné platí $\forall x(f(x) \leq g(x))$, nechť f má primitivně rekurzívní graf a nechť g je primitivně rekurzívní. Pak i f je primitivně rekurzívní. Dokažte.

   Návod. Užijte omezenou minimalizaci.

6. Změnila by se třída všech funkcí odvoditelných ze základních pomocí primitivní rekurze, substituce a minimalizace, kdybychom přijali omezení, že primitivní rekurze a minimalizace se smějí použít jen na totální funkce?

   Návod. Použijte větu o normální formě.

7. Rozhodněte, zda graf a definiční obor funkcí α a β definovaných předpisem
$$\alpha(x) \simeq \mu y \mathrm{T}(x, x, y) \quad \text{a} \quad \beta(x) \simeq \mathrm{z}(\mu y \mathrm{T}(x, x, y)),$$
   kde z je konstantní funkce s hodnotou nula, jsou obecně rekurzívní.

   Návod. Všimněte si, že pro funkci β platí ekvivalence $x \in \mathrm{K} \Leftrightarrow [x, 0] \in \mathrm{Graf}(\beta)$.

8. Nechť f je odvozena jedním použitím minimalizace z funkce g, která je rekurzívní (tedy totální). Musí být funkce f totální? Musí mít obecně rekurzívní graf?

9. • Uvažujte třídu všech funkcí, které jsou odvoditelné ze základních pomocí všech tří operací ale s omezením, že všechny se smějí použít jen na totální funkce. Obsahuje tato třída i nějaké netotální funkce? Obsahuje tato třída všechny obecně rekurzívní funkce? Obsahuje tato třída všechny částečně rekurzívní funkce?

   Návod. Lze využít dvě předchozí cvičení.

10. Rozhodněte, zda platí: je-li $A \subseteq \mathrm{N}^2$ rekurzívně spočetná relace taková, že $\forall x \exists y A(x,y)$, pak existuje rekurzívní funkce g taková, že pro každé x platí $g(x) = \min\{\, y\ ;\ A(x,y)\,\}$.

    Návod. Uvažujte relaci $A = \{\, [x,y]\ ;\ x \in \mathrm{K} \ \vee\ y \geq 1 \,\}$.

11. Nechť A je binární rekurzívně spočetná relace. Dokažte, že existuje částečně rekurzívní funkce β (výběrová funkce pro relaci A), pro kterou platí
$$!\beta(x) \Leftrightarrow \exists y A(x,y), \qquad !\beta(x) \Rightarrow A(x,\beta(x)).$$

    Návod. Není-li A rekurzívní, předpis $\beta(x) \simeq \mu y A(x,y)$ nedefinuje částečně rekurzívní funkci. Od A lze ale přejít k rekurzívní ternární relaci díky větě o projekci. Definujte funkci ψ, která k x hledá číslo $\langle y, w\rangle$ takové, že w je svědek pro náležení dvojice $[x,y]$ do A.

12. Rozhodněte, zda následující tvrzení platí:
    (a) Vzor rekurzívní množiny i přes částečně rekurzívní funkci je rekurzívní.
    (b) Obraz rekurzívní množiny přes obecně rekurzívní funkci je rekurzívní.

    Návod. Dokažte, že K je vzorem, resp. obrazem rekurzívní množiny přes patřičnou funkci.

13. • Nechť R je binární rekurzívně spočetná relace na N taková, že R je ekvivalence a má jen konečně mnoho tříd. Dokažte, že R je rekurzívní.

    Návod. Zdůvodněte, že je-li R rekurzívně spočetná (množina dvojic), pak každá její třída (třída ekvivalence) je rekurzívně spočetná množina (čísel). Zobecněte Postovu větu na konečný počet rekurzívně spočetných množin. Nakonec zdůvodněte, že když každá z konečně mnoha tříd je rekurzívní, pak i R jako množina dvojic je rekurzívní.

14. Řekneme, že množiny A a B jsou *rekurzívně oddělitelné*, jestliže existuje rekurzívní množina D taková, že $A \subseteq D$ a $D \cap B = \emptyset$. V opačném případě jsou *rekurzívně neoddělitelné*. Dokažte, že existují disjunktní rekurzívně spočetné množiny, které jsou rekurzívně neoddělitelné.

    Návod. Využijte částečně rekurzívní funkci ψ, která nemá totální rekurzívní prodloužení. O funkci ψ lze navíc předpokládat, že $\mathrm{Rng}(\psi) \subseteq \{0,1\}$.

15. • (Věta o parametrech) V každém z následujících případů rozhodněte, zda existuje funkce g s popsanou vlastností:

    (a) $\mathrm{W}_{g(x)} = \mathrm{K} \cap \{0,1,..,x\}$,

    (b) $\mathrm{W}_{g(x,y)} = \mathrm{W}_x \cup \{y\}$,

    (c) $\mathrm{W}_{g(x)} = f^{-1}{}''\mathrm{W}_x$, kde f je rekurzívní funkce jedné proměnné,

(d) $\mathrm{W}_{g(x)} = \begin{cases} \emptyset & \text{když } x \in \mathrm{K} \\ \{x\} & \text{jinak,} \end{cases}$

(e) $\mathrm{W}_{g(x)} = \begin{cases} \mathrm{N} - \{x\} & \text{když } x \in \mathrm{K} \\ \{x\} & \text{jinak,} \end{cases}$

(f) $\mathrm{W}_{g(x)} = \{\, v\,;\ \mathrm{T}(x,x,v)\ \&\ \forall u{<}v\, \neg \mathrm{T}(x,x,u)\,\}$,

(g) $\varphi_{g(x)}(v) \simeq \mu w \mathrm{T}(x,x,w)$
(t.j. $g(x)$ je index funkce, která nezávisí na vstupu v),

(h) $\varphi_{g(x)}(v) \simeq \begin{cases} 0 & \text{když } \forall u{\le}v\, \neg \mathrm{T}(x,x,u) \\ \uparrow & \text{jinak,} \end{cases}$

(i) $\mathrm{W}_{g(x)} = \{\, v\,;\ \forall u{\le}v\, \exists w \mathrm{T}(x,u,w)\,\}$,

(j) $\mathrm{W}_{g(x)} = \begin{cases} \mathrm{N} & \text{když } x \in \mathrm{K} \\ \{x\} & \text{jinak,} \end{cases}$

Návod. V případě (d) platí NE. Množiny $\{x; \mathrm{W}_{g(x)} \neq \emptyset\}$ a K by byly rekurzívně spočetné a navzájem komplementární.

16. Operace $\oplus$ je na množinách přirozených čísel definována takto:
$$A \oplus B = \{\, 2x\,;\ x \in A\,\} \cup \{\, 2x+1\,;\ x \in B\,\}.$$
Dokažte, že platí

(a) $A \le_m A \oplus B, \qquad B \le_m A \oplus B$.

(b) Je-li X taková, že $A \le_m X$ i $B \le_m X$, pak $A \oplus B \le_m X$.

17. Pro množiny $A, B \subseteq \mathrm{N}$ označme
$$A \otimes B = \{\, (x,y)\,;\ x \in A\ \&\ y \in B\,\},$$
kde kulaté závorky označují párovací funkci (tedy $A \otimes B$ je množina čísel, nikoliv dvojic).

(a) Platí $A \le_m A \otimes B$ pro každou dvojici množin A a B?

(b) Platí $\mathrm{K} \oplus -\mathrm{K} \le_m \mathrm{K} \otimes -\mathrm{K}$?

(c) Platí $\mathrm{K} \oplus -\mathrm{K} \le_m -(\mathrm{K} \oplus -\mathrm{K})$?

(d) Je $\mathrm{K} \oplus -\mathrm{K}$ m-převeditelná na některou z množin K a $-\mathrm{K}$?

(e) Je $\mathrm{K} \otimes -\mathrm{K}$ m-převeditelná na některou z množin K a $-\mathrm{K}$?

18. • Pro každou z následujících množin rozhodněte, zda K a $-\mathrm{K}$ je na ni m-převeditelná:

(a) $\{\, x\,;\ \mathrm{W}_x = \emptyset\,\}$,

(b) $\{\, x\,;\ \varphi_x$ je totální $\}$,

(c) $\{\, x\,;\ \mathrm{W}_x$ je jednoprvková $\}$,

(d) $\{\, x\,;\ \mathrm{W}_x$ je konečná $\}$,

(e) $\{\, x\,;\ \mathrm{W}_x$ je rekurzívní $\}$.

Návod. K není převeditelná na množinu v (a), protože komplement oné množiny je rekurzívně spočetný. Všechny ostatní převeditelnosti platí a většinou lze využít některou z funkcí z bodů (d)–(i) z cvičení 15.

19. • Dokažte, že množiny $\mathrm{Tot} = \{\, x\,;\ \varphi_x$ je totální $\}$ a $\mathrm{Unb} = \{\, x\,;\ \mathrm{W}_x$ je nekonečná $\}$ jsou navzájem m-převeditelné.

Návod. Pro $\mathrm{Tot} \leq_m \mathrm{Unb}$ lze také využít jednu z funkcí z cvičení 15. Pro $\mathrm{Unb} \leq_m \mathrm{Tot}$ použijte funkci g, pro kterou platí: pro každé x, funkce $v \mapsto \varphi_{g(x)}(v)$ hledá (a vyhledá, pokud existuje) nějaký prvek množiny W_x, který je větší než v. K důkazu existence takové funkce použijte cvičení 11.

20. • Nechť D je konečná neprázdná množina. Dokažte, že množiny $\{x; \mathrm{W}_x = D\}$ a $\mathrm{K} \otimes -\mathrm{K}$ jsou na sebe navzájem m-převeditelné (pozor, není zde řeč o množině $\{x; \mathrm{W}_x$ je konečná$\}$, množina D je jedna pevná).

Návod. Z kompletnosti množiny K plyne, že každá množina tvaru $A \cap B$, kde $A \in \Sigma_1$, $B \in \Pi_1$, je m-převeditelná na $\mathrm{K} \otimes -\mathrm{K}$. K důkazu, že $\mathrm{K} \otimes -\mathrm{K} \leq_m \{\, x\,;\ \mathrm{W}_x = D\,\}$, užijte obecně rekurzívní funkci g, pro kterou platí: $\mathrm{W}_{g(x)} = \emptyset$, když $l(x) \notin \mathrm{K}$ a $r(x) \notin \mathrm{K}$, dále $\mathrm{W}_{g(x)} = D$, když $l(x) \in \mathrm{K}$ a $r(x) \notin \mathrm{K}$, a konečně $\mathrm{W}_{g(x)} = \mathrm{N}$, když $r(x) \in \mathrm{K}$.

21. • Rozhodněte, zda existuje e takové, že následující množina: je rekurzívní, není rekurzívní, je *RS*, není *RS*, její komplement je *RS*, není *RS*:

(a) $\{\, x\,;\ \varphi_e(x) = 0\,\}$,

(b) $\{\, x\,;\ \mathrm{W}_x = \mathrm{W}_e\,\}$.

Návod. V (b) zdůvodněte, že množina $-\mathrm{K}$ je vždy převeditelná na danou množinu. Rozlište případy $\mathrm{W}_e = \mathrm{N}$ a $\mathrm{W}_e \neq \mathrm{N}$.

22. • Pro každý z následujících případů dokažte, že neexistuje částečně rekurzívní funkce ψ s popsanou vlastností.

(a) W_x konečná $\Rightarrow\ !\psi(x)\ \&\ \mathrm{W}_x \subseteq \{0, .., \psi(x)\}$
(tj. ψ nalezne některou horní závoru pro W_x, pokud horní závory existují),

(b) $\mathrm{W}_x \subseteq \{0, .., z\} \Rightarrow\ !\psi(z, x)$ a $\psi(z, x)$ je počet prvků množiny W_x
(tj. ψ určí počet prvků množiny W_x, pokud je k dispozici horní závora množiny W_x),

(c) W_x rekurzívní $\Rightarrow\ !\psi(x)\ \&\ \mathrm{W}_{\psi(x)} = -\mathrm{W}_x$.

Návod k (a). Uvažujte funkci g z cvičení 15(f). Množina $\mathrm{W}_{g(x)}$ je jednoprvková nebo prázdná podle toho, zda x je nebo není v K. $\mathrm{W}_{g(x)}$ je v každém případě konečná, takže $x \mapsto \psi(g(x))$ je totální funkce. Z podmínky $\mathrm{W}_{g(x)} \subseteq \{0, .., \psi(g(x))\}$ plyne

$$x \in \mathrm{K} \Leftrightarrow \exists w \leq \psi\,(g(x))\mathrm{T}(x, x, w).$$

To je spor, protože napravo by byla rekurzívní podmínka.

Návod k (b). Existuje funkce g, pro kterou platí $\mathrm{W}_{g(x)} \subseteq \{0\}$ pro všechna x, a $\mathrm{W}_{g(x)} \neq \emptyset$ právě když $x \in \mathrm{K}$. Z funkce $\psi(0, x)$ by opět šlo opatřit rekurzívní podmínku pro $x \in \mathrm{K}$.

Návod k (c). Vezměte funkci g takovou, že $\mathrm{W}_{g(x)}$ je N nebo $\emptyset$ podle toho, zda x je nebo není v K. Kdyby ψ existovala, funkce $x \mapsto \psi(g(x))$ by byla totální a platilo by $x \notin \mathrm{K} \Leftrightarrow \mathrm{W}_{\psi(g(x))} \neq \emptyset$.

23. (Věta o rekurzi) Rozhodněte, zda existuje číslo m, které splňuje:

    (a) $\mathrm{W}_m = \mathrm{N} - \{m\}$,

    (b) $\mathrm{W}_m = \{\, x \,;\, \neg!\varphi_m(x) \,\}$.

24. Dokažte, že pro každou dvojici obecně rekurzívních funkcí g a h existují čísla a a b taková, že zároveň platí

$$\mathrm{W}_a = \mathrm{W}_{g(a,b)}, \qquad \mathrm{W}_b = \mathrm{W}_{h(a,b)}.$$

    Návod. Použijte dvakrát větu o rekurzi. Nejprve sestavte rovnici pro neznámou funkci. S užitím oné funkce pak sestavte rovnici pro neznámé číslo.

25. • Dokažte, že $\mathrm{K} \otimes -\mathrm{K}$ není m-převeditelná na $\mathrm{K} \oplus -\mathrm{K}$.

    Návod. Kdyby ano, z cvičení 17 by plynulo, že $\mathrm{K} \otimes -\mathrm{K}$ je m-převeditelná na svůj komplement. Dále vezměte v úvahu tvrzení z cvičení 20 a Riceovu větu.

26. Dokažte, že každé dvě disjunktní Π_1-množiny jsou rekurzívně oddělitelné.

27. Dokažte, že průnik dvou prostých množin je opět prostá množina. Sjednocení dvou prostých množin je množina, která je prostá, nebo má konečný doplněk.

Sylabus

Kurs je sestavena zhruba podle kapitol 1–8 a zčásti 11 a 14 knihy [3]. Úvodní část je mnohem podrobnější než v [3] a využívá ostatní zdroje. Některé ze základních pojmů lze vyčíst také z oddílu 2.2 knihy [4]. Problematika, na kterou nedošlo, je vyznačena *kurzívou.* Nedošlo také na cvičení 24 a 27.

Definice (částečně, primitivně) rekurzívních funkcí, definice rekurzívně spočetných a (primitivně) rekurzívních množin a relací (predikátů) jako základní výpočtový model, tj. jako matematické zpřesnění pojmu algoritmus. Odvozené operace s funkcemi a množinami: booleovské operace a omezené kvantifikátory, omezená minimalizace, odvození funkce rozborem případů (větvením), vzor množiny přes funkci ([1]: 96–111).

Kódování konečných posloupností přirozených čísel. Zobecnění operace primitivní rekurze ([1]: 112–126).

Některé výpočtové modely jiné než částečně rekurzívní funkce: Turingovy stroje ([1]: 1–34 resp. 1–40), vývojové diagramy ([2]: 61–74), jednoduchý vyšší programovací jazyk ([2]: ...). Jejich vzájemná ekvivalence ([2]: 90–100), Churchova teze.

Aritmetizace ([2]: 87), věta o normální formě ([2]: 90), enumerace částečně rekurzívních funkcí a rekurzívně spočetných množin.

Diagonální metoda ([2]: 145–147). *Rekurzívní funkce nebo množiny, které nejsou primitivně rekurzívní ([2]: 96).* Rekurzívně spočetné množiny, které nejsou rekurzívní. Problém zastavení ([3]: 25 a 62–63). Univerzální funkce.

Věta o projekci. Souvislosti mezi rekurzívností funkce a rekurzívností grafu. Ekvivalentní definice *RS* množin. Postova věta. Uzavřenost tříd *PR*, *OR* a *RS* na operace ([2]: 135–147, [3]: 57–69).

Věta o parametrech ([2]: 131, [3]: 57–69). m-převeditelnost, m-kompletnost, m-kompletnost problému zastavení. *Produktivní a kreativní množiny. Kreativnost m-kompletních množin.*

Věta o rekurzi ([3]: 180, [1]: 216–219 a díl II: 33–43). Riceova věta. *m-kompletnost kreativních množin ([3]: 183).*

Imunní množiny. Prosté (simple) množiny jako příklad množin, které nejsou m-kompletní ([1]: –204, [3]: 105–108).

Aritmetická hierarchie ([1] díl II: 188–189).

Literatura

[1] O. Demuth, R. Kryl a A. Kučera. Teorie algoritmů. Skriptum, Matematicko-fyzikální fakulta UK, 1989.

[2] P. Odifreddi. *Classical Recursion Theory.* North-Holland, Amsterdam, 1989.

[3] H. Rogers, Jr. *Theory of Recursive Functions and Effective Computability.* McGraw-Hill, New York, 1967.

[4] V. Švejdar. *Logika: neúplnost, složitost a nutnost.* Academia, Praha, 2002.