Cvičení ke kursu *Logika II*, část I
(30. listopadu 2008)

1. Nechť P a Q jsou unární a R binární predikát. Dokažte, že následující formule jsou logicky platné, ale obrátíme-li (vnější) implikaci, ve všech případech vznikne formule, která není logicky platná:
   $\exists x(P(x) \,\&\, Q(x)) \to \exists x P(x) \,\&\, \exists x Q(x)$,
   $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \to \forall x(P(x) \vee Q(x))$,
   $\exists x \forall y R(x,y) \to \forall y \exists x R(x,y)$,
   $\forall x(P(x) \to Q(x)) \to (\forall x P(x) \to \forall x Q(x))$,
   $\forall x(P(x) \to Q(x)) \to (\exists x P(x) \to \exists x Q(x))$.

2. Když Δ je množina formulí a φ a ψ jsou formule, pak $\Delta, \psi \models \varphi$, právě když $\Delta \models \psi \to \varphi$. Dokažte.

3. Nechť T je teorie s jazykem $\{\in\}$ s jediným binárním predikátem a s axiomy
   $\forall x \forall y(\forall v(v \in x \;\equiv\; v \in y) \;\to\; x = y)$,
   $\exists x \forall v \neg(v \in x)$,
   $\forall x \forall y \exists z \forall v(v \in x \;\vee\; v = y \;\to\; v \in z)$.

   (a) Dokažte pomocí konečných modelů, že v T nelze dokázat formuli $\forall x(x \notin x)$ ani $\neg\exists x \forall v(v \in x)$.
   (b) Dokažte, že žádný ze tří axiomů teorie T není dokazatelný z ostatních dvou.

4. Nechť φ je formule v jazyce L_1 a nechť $L_2 \subseteq L_1$ je seznam všech mimologických symbolů vyskytujících se ve φ. Pak φ platí v každé struktuře pro L_1, právě když φ platí v každé struktuře pro L_2. Dokažte.

5. Struktura $\mathbf{D_1} = \langle D_1, r_1 \rangle$ je *podstruktura* struktury $\mathbf{D_2} = \langle D_2, r_2 \rangle$, jestliže platí inkluze $D_1 \subseteq D_2$ pro jejich nosné množiny a jestliže realizace $r_1(I)$ libovolného symbolu I jejich jazyka je restrikcí jeho realizace $r_2(I)$ na množinu D_1. Podstruktury struktury $\mathbf{D_2}$ lze ztotožnit s neprázdnými podmnožinami D_1 množiny D_2, které jsou uzavřeny na všechny operace (tj. pro které platí $r_2(F)(a_1, .., a_n) \in D_1$ kdykoliv F je n-ární funkční symbol a $a_1, .., a_n$ jsou prvky D_1). Nechť $\mathbf{D_1}$ je podstruktura struktury $\mathbf{D_2}$. Dokažte, že platí
   (a) $\mathbf{D_1} \models \varphi[e] \;\Leftrightarrow\; \mathbf{D_2} \models \varphi[e]$, kdykoliv φ je otevřená formule a e je ohodnocení proměnných, jehož všechny hodnoty jsou v D_1.
   (b) $\mathbf{D_1} \models \varphi \;\Rightarrow\; \mathbf{D_2} \models \varphi$, kdykoliv φ je existenční sentence.
   (c) $\mathbf{D_2} \models \varphi \;\Rightarrow\; \mathbf{D_1} \models \varphi$, kdykoliv φ je univerzální formule.
   Přitom existenční formule je formule tvaru $\exists v_1 .. \exists v_k \psi$, kde ψ je otevřená formule, a naopak univerzální formule je formule tvaru $\forall v_1 .. \forall v_k \psi$, kde ψ je otevřená. Najděte příklady na to, že tvrzení (a)–(c) nelze zesílit: (a) neplatí pro existenční ani univerzální sentence, implikace v (b) ani v (c) nelze obrátit a (b) neplatí pro existenční formule.

6. Použijte předchozí cvičení k důkazu, že sentence $\forall x \exists y(x < y)$ není ekvivalentní s žádnou existenční ani s žádnou univerzální sentencí.

7. Rozhodněte, zda platí toto tvrzení: je-li φ otevřená formule jazyka L a formule $\exists x\varphi$ je logicky platná, pak existuje term t jazyka L takový, že formule $\varphi_x(t)$ je logicky platná.

   Návod. Uvažujte jazyk $\{P, F\}$ s unárním predikátem a unární funkcí, a vezměte formuli $P(x) \vee \neg P(F(x))$.

8. Rozhodněte, zda platí toto tvrzení: je-li φ formule jazyka L a formule $\exists x\varphi$ je logicky platná, pak existují termy $t_1, .., t_n$ jazyka L takové, že formule $\varphi_x(t_1) \vee .. \vee \varphi_x(t_n)$ je také logicky platná.

   Návod. Uvažujte formuli $\exists x(P(x) \rightarrow \forall v P(v))$.

9. Teorie T a S jsou *ekvivalentní*, jestliže každý axiom teorie S vyplývá z T a zároveň každý axiom teorie T vyplývá z S. Dokažte, že T a S jsou ekvivalentní, právě když mají stejné modely (tj. každý model teorie T je zároveň modelem teorie S a naopak).

10. Nechť T je teorie s jazykem $\{<, \leq\}$ se dvěma binárními predikáty a s axiomy
    $\forall x\forall y\forall z(x \leq y \;\&\; y \leq z \rightarrow x \leq z)$,
    $\forall x(x \leq x)$,
    $\forall x\forall y(x < y \equiv x \leq y \;\&\; \neg(y \leq x))$.

    (a) Rozhodněte, zda formule $\forall x\forall y\forall z(x < y \;\&\; y < z \rightarrow x < z)$, $\forall x\neg(x < x)$, $\forall x\forall y(x \leq y \;\&\; y \leq x \rightarrow x = y)$, $\forall x\forall y(x \leq y \equiv x < y \vee x = y)$ jsou dokazatelné v T.
    (b) Rozhodněte, zda existuje formule $\varphi(x, y)$ neobsahující symbol $\leq$ (tj. atomické podformule formule φ obsahují jen symboly $<$ a $=$) taková, že $\forall x\forall y(x \leq y \equiv \varphi(x, y))$ je sentence dokazatelná v T.

    Návod. T má dva neizomorfní modely $\mathbf{M_1}$ a $\mathbf{M_2}$ takové, že odstraníme-li z nich realizace (interpretace) symbolu $\leq$, oba modely se stanou izomorfními. Lze vystačit s dvouprvkovými modely. Uvažte, že izomorfismus zachovává všechny formule příslušného jazyka.

11. Nechť T je množina sentencí, která je ekvivalentní s nějakou konečnou množinou sentencí S. Dokažte, že v tom případě je T ekvivalentní i s jistou konečnou množinou F sentencí takovou, že $F \subseteq T$.

    Návod. Použijte větu o kompaktnosti.

12. V jazyce bez mimologických symbolů (tj. jen s predikátem rovnosti) formulujte bezespornou teorii, která nemá žádné konečné modely. Dokažte, že tato teorie není konečně axiomatizovatelná (tj. není ekvivalentní s žádnou konečnou množinou axiomů).

    Návod. Použijte cvičení 11.

13. Dokažte, že třída všech souvislých neorientovaných grafů, chápaná jako třída struktur pro jazyk s jedním binárním predikátem, není axiomatizovatelná.

14. Když třída $\mathcal{C}$ i její komplement $\overline{\mathcal{C}}$ (tj. třída všech struktur pro příslušný jazyk, které nejsou v $\mathcal{C}$) jsou axiomatizovatelné, pak každá z nich je dokonce konečně axiomatizovatelná.

15. Dokažte, že teorie SUCC není konečně axiomatizovatelná.

16. Uvažujte jazyk $\{0, \mathrm{S}, <\}$ s konstantou, unární funkcí a binárním predikátem. Teorie DOS (discrete order with successor, diskrétní uspořádání s následníkem) má axiomy teorie SUCC a navíc následující axiomy o predikátu $<$:

$\forall x \forall y \forall z(x < y \mathbin{\&} y < z \rightarrow x < z)$,
$\forall x \forall y(x < y \rightarrow \neg(y < x))$,
$\forall x \forall y(x < y \vee x = y \vee y < x)$,
$\forall x(x = 0 \vee 0 < x)$,
$\forall x \forall y(x < \mathrm{S}(y) \equiv x = y \vee x < y)$.

Dokažte, že následující formule jsou v teorii DOS dokazatelné:

$\forall x(x < \mathrm{S}(x))$,
$\forall x \neg(x < x)$,
$\forall x \forall y(\mathrm{S}(x) = y \vee \mathrm{S}(x) < y \equiv x < y)$,
$\forall x \neg \exists v(x < v \mathbin{\&} v < \mathrm{S}(x))$,
$\forall x \forall y(x < y \equiv \mathrm{S}(x) < \mathrm{S}(y))$.

Je teorie DOS konečně axiomatizovatelná?

17. Rozhodněte, zda existuje sentence v jazyce teorie SUCC, která není dokazatelná v teorii SUCC, ale je dokazatelná v teorii DOS ze cvičení 16.

    Návod. Kdyby taková sentence φ existovala, existoval by model $\mathbf{M} \models$ SUCC, který se nedá žádnou realizací symbolu $<$ dodefinovat na model teorie DOS. Dokažte zvlášť, že tak tomu ale není: každý model teorie SUCC lze vhodnou realizací symbolu $<$ dodefinovat (expandovat) na model teorie DOS.

18. Dokažte, že teorie z cvičení 12 je úplná.

19. Dokažte úplnost teorie DNO pomocí eliminace kvantifikátorů.

    Návod. Z triviálního důvodu není pravda, že každá sentence je v DNO ekvivalentní otevřené sentenci, v jazyce teorie DNO totiž žádné otevřené sentence neexistují. Tuto potíž překonejte následovně. Označte symbolem $\perp$ sentenci $\exists x(x \neq x)$ a dokažte pomocí eliminace kvantifikátorů, že každá formule je ekvivalentní s formulí, která neobsahuje žádné kvantifikátory *s výjimkou těch, které jsou skryty v symbolech* $\perp$.

20. Rozhodněte, zda platí: je-li T bezesporná teorie s nejvýše spočetným jazykem a každé dva její nekonečné spočetné modely jsou spolu izomorfní, pak T je úplná.

21. Rozhodněte, zda platí: je-li T bezesporná teorie s nejvýše spočetným jazykem a každé dva její nejvýše spočetné modely jsou spolu izomorfní, pak T je úplná.