Cvičení ke kursu *Logika II*, část II
(13. ledna 2007)

1. Dokažte, že každá jednoprvková množina je definovatelná ve struktuře $\langle \mathrm{N}, < \rangle$. Nechť dále R je relace
$$\{\, [x, y]\, ;\ |x - y| = 1 \,\}.$$
Dokažte, že i ve struktuře $\langle \mathrm{N}, R \rangle$ je každá jednoprvková množina definovatelná.

2. Je-li relace $R \subseteq \mathrm{N}^k$ definovatelná ve struktuře $\langle \mathrm{N}, 0, \mathrm{s} \rangle$, pak existuje číslo m takové, že pro každé i a každou volbu čísel $a_1, .., a_{i-1}, a_{i+1}, .., a_k$ množina
$$\{\, b\, ;\ [a_1, .., a_{i-1}, b, a_{i+1}, .., a_k] \in R \,\}$$
nebo její komplement má nejvýše m prvků. Dokažte. Platí analogická věta i pro strukturu $\langle \mathrm{N}, 0, \mathrm{s}, < \rangle$? Rozhodněte, zda relace $<$ je ve struktuře $\langle \mathrm{N}, 0, \mathrm{s} \rangle$ definovatelná.

3. Dokažte, že funkce $x \mapsto x + 1$ je definovatelná ve struktuře $\langle \mathrm{N}, < \rangle$.

4. Dokažte, že ve struktuře $\langle \mathrm{N}, 0, \mathrm{s}, \cdot \rangle$ je definovatelné sčítání přirozených čísel.

   Návod. Ověřte a využijte implikaci
$$a + b = c \;\Rightarrow\; (1 + ac)(1 + bc) = 1 + c^2(1 + ab).$$

5. Dokažte, že ve struktuře $\langle \mathrm{N}, +, 0, \mathrm{s}, f \rangle$, kde f je umocňování na druhou (jako funkce jedné proměnné), je definovatelná operace násobení.

6. Nechť T je libovolná teorie. Dokažte, že následující podmínky jsou ekvivalentní.
   (a) Každé bezesporné rozšíření S teorie T je nerozhodnutelné.
   (b) Každé bezesporné rekurzívně axiomatizovatelné rozšíření S teorie T je nerozhodnutelné.

7. Každá rozhodnutelná bezesporná teorie má rozhodnutelné zúplnění. Dokažte.

8. Nechť T je teorie, jejíž jazyk $\{0, \mathrm{S}, P\}$ vznikl přidáním unárního predikátu P k jazyku teorie SUCC a jejíž axiomy jsou tytéž jako axiomy teorie SUCC. Je teorie T úplná? Nechť A je rekurzívně spočetná nerekurzívní množina. Uvažujme dvě rozšíření teorie T:
$$\begin{aligned} S_1 &= T \cup \{\, P(\overline{n})\, ;\ n \in A \,\} \\ S_2 &= T \cup \{\, P(\overline{n})\, ;\ n \in A \,\} \cup \{\, \neg P(\overline{n})\, ;\ n \notin A \,\}. \end{aligned}$$
O každé z teorií S_1 a S_2 rozhodněte, zda

   (a) má alespoň dva navzájem neizomorfní nejvýše spočetné modely,

   (b) je rozhodnutelná,

   (c) je konečně axiomatizovatelná,

   (d) je rekurzívně axiomatizovatelná.

   Návod k (b). Ověřte a využijte ekvivalenci $n \in A \Leftrightarrow S_1 \vdash P(\overline{n})$.
   Návod k (d). Dokažte podobně jako v (b) ekvivalenci $n \in \overline{A} \Leftrightarrow S_2 \vdash \neg P(\overline{n})$. Zdůvodněte, že z toho plyne, že množina $\mathrm{Thm}(S_2)$ není rekurzívně spočetná.

9. Zdůvodněte, že teorie S_1 z cvičení 8 není úplná a že množinu A lze zvolit tak, aby ani S_2 nebyla úplná.
   Návod. Uvažte třeba sentenci $\forall x(P(x) \vee P(\mathrm{S}(x))$.

10. Dokažte následující formule v PA.

   (a) Vlastnosti aritmetických operací:

$(z+y)+x = z+(y+x)$	$z\cdot(y+x) = z\cdot y + z\cdot x$
$0+x = x$	$(z\cdot y)\cdot x = z\cdot(y\cdot x)$
$\mathrm{S}(y)+x = \mathrm{S}(y+x)$	$x \neq \mathrm{S}(x)$
$y+x = x+y$	$y+x = z+x \rightarrow y = z$
$0\cdot x = 0$	$x+y = 0 \rightarrow x = 0 \ \&\ y = 0$
$\mathrm{S}(y)\cdot x = y\cdot x + x$	$x\cdot y = 0 \rightarrow x = 0 \vee y = 0$
$y\cdot x = x\cdot y$	$\exists u(u+x = y \vee u+y = x)$.

   (b) Vlastnosti relace $<$:

$x < y \ \&\ y < z \rightarrow x < z$	$x < y \vee x = y \vee y < x$.
$\neg(x < x)$	

   (c) Vztah relací $\leq$ a $<$ k sobě navzájem a k operacím:

$x \leq y \equiv x < y \vee x = y$	$x < y \rightarrow x+z < y+z$
$x < \mathrm{S}(y) \equiv x < y \vee x = y$	$x < y \ \&\ z \neq 0 \rightarrow x\cdot z < y\cdot z$.

11. Dokažte, že je-li φ libovolná aritmetická formule, pak každá z formulí:
$$\forall u{\leq}x\,\exists v\varphi(u,v) \rightarrow \exists y\forall u{\leq}x\,\exists v{\leq}y\,\varphi(u,v)$$
$$\forall x\forall y(\varphi(x,y) \ \&\ x \neq 0 \rightarrow \exists u\exists v(\varphi(u,v) \ \&\ v < y)) \rightarrow (\exists x\exists y\varphi(x,y) \rightarrow \exists y\varphi(0,y))$$
$$\varphi(0,0) \ \&\ \forall x\forall y(\varphi(x,y) \rightarrow \varphi(x,\mathrm{S}(y))) \ \&\ \forall x(\forall y\varphi(x,y) \rightarrow \varphi(\mathrm{S}(x),0)) \rightarrow \forall x\forall y\varphi(x,y)$$
   je dokazatelná v PA.

12. Rozhodněte, zda na struktuře $\langle \mathrm{N}, 0, \mathrm{s}\rangle + \langle \mathrm{Z}, \mathrm{s}\rangle$ lze definovat binární operaci $+$ tak, aby výsledná struktura

   (a) byla modelem teorie s axiomy Q1–Q5,

   (b) byla modelem teorie $\mathrm{Th}(\langle \mathrm{N}, +, 0, \mathrm{s}\rangle)$.

13. Přidejme ke struktuře **N** přirozených čísel dva nové prvky a, b a rozšiřme následnickou funkci na množinu $M = \mathrm{N} \cup \{a, b\}$ předpisem $\mathrm{S}(a) = b$, $\mathrm{S}(b) = a$. Dokažte, že sčítání a násobení je možno rozšířit na celou množinu M tak, aby ve výsledné struktuře platily všechny axiomy Robinsonovy aritmetiky Q.

14. Rozhodněte, zda následující formule jsou dokazatelné v Robinsonově aritmetice Q:

$\forall x(x \leq x)$	$\forall x\forall y(x+y = 0 \rightarrow x = 0 \ \&\ y = 0)$
$\forall x(x \leq 0 \rightarrow x = 0)$	$\forall x\forall y(x \leq y \equiv \mathrm{S}(x) \leq \mathrm{S}(y))$
$\forall x(0 \leq x)$	$\forall x\forall y(x < y \rightarrow x < \mathrm{S}(y))$
$\forall x(0\cdot x = 0)$	$\forall x\forall y(\mathrm{S}(x) < y \rightarrow x < y)$
$\forall x(x\cdot \overline{1} = x)$	$\forall x\forall y(x\cdot y = 0 \rightarrow x = 0 \vee y = 0)$
$\forall x\forall y\exists z(x \leq z \ \&\ y \leq z)$	$\forall x(x \leq \overline{1} \rightarrow x = 0 \vee x = \overline{1})$

$\forall x \neg(x < x)$ $\qquad$ $\forall x \forall y \forall z((z + y) + x = z + (y + x))$.
$\forall x \forall y(x \leq y \rightarrow x < y \vee x = y)$

Návod. NE lze většinou dokázat vhodnou volbou operací v cvičení 13.

15. Rozhodněte, zda platí
(a) Když φ a ψ jsou sentence a $\mathsf{PA} \vdash \varphi \vee \psi$, pak $\mathsf{PA} \vdash \varphi$ nebo $\mathsf{PA} \vdash \psi$.
(b) Když φ a ψ jsou Σ_1-sentence a $\mathsf{PA} \vdash \varphi \vee \psi$, pak $\mathsf{PA} \vdash \varphi$ nebo $\mathsf{PA} \vdash \psi$.

Návod k (b). Použijte Σ_1-korektnost na disjunkci $\varphi \vee \psi$ a Σ-úplnost zvlášť na φ a na ψ.

16. Rozhodněte, zda platí
(a) J-li $\exists x \varphi(x)$ aritmetická sentence taková, že $\mathsf{PA} \vdash \exists x \varphi(x)$, pak existuje číslo n takové, že $\mathsf{PA} \vdash \varphi(\overline{n})$.
(b) Je-li $\exists x \varphi(x)$ aritmetická sentence taková, že φ je omezená a $\mathsf{PA} \vdash \exists x \varphi(x)$, pak existuje číslo n takové, že $\mathsf{PA} \vdash \varphi(\overline{n})$.

Návod. V (a) vezměte omezenou formuli $\psi(y)$, splňující podmínky $\mathbf{N} \models \forall y \psi(y)$ a $\mathsf{PA} \nvdash \forall y \psi(y)$. Existenci takové formule zaručuje První Gödelova věta. Dále uvažujte sentenci $\exists x \forall y(\psi(y) \vee \neg\psi(x))$.

17. Tvrzení, že každé sudé číslo větší než 3 je součtem dvou prvočísel, se nazývá Goldbachova domněnka a není o něm známo, zda je pravdivé. Dokažte, že je-li toto tvrzení nezávislé na PA, pak platí v $\mathbf{N}$.

Návod. Určete aritmetickou klasifikaci daného tvrzení a použijte Σ-úplnost.

18. Nechť T je teorie, která vznikne z Robinsonovy aritmetiky odstraněním axiomu Q1 (nebo Q2), takže T má axiomy Q2–Q9 resp. Q1 a Q3–Q9. Dokažte, že T je nerozhodnutelná, ale není podstatně nerozhodnutelná. (Návod: teorie konečné struktury je rozhodnutelná.) Je teorie s aritmetickým jazykem a s prázdnou množinou axiomů podstatně nerozhodnutelná?