Cvičení ke kursu *Logika II*, část III

(30. listopadu 2008)

Osnova přednášky

přednáška je určena studentům, kteří absolvovali úvodní kursy logiky a teorie rekurzívních funkcí. Předpokládané znalosti: syntax a sémantika klasické výrokové a predikátové logiky (s rovností), hilbertovský logický kalkulus, věta o dedukci. Věty o úplnosti a o kompaktnosti. Rekurzívní a rekurzívně spočetné množiny. Postova věta, m-převeditelnost, m-kompletnost.

Teorie, modely, kompaktnost, úplnost Tato část je probírána zhruba podle J Barwise v úvodu ke knize [1] (kap. A1, str. 5–46) s tím, že jsou pominuty některé příklady vyžadující znalost algebraických pojmů (tělesa, ideály). Navíc se probírá eliminace kvantifikátorů (příklad teorie přirozených čísel jen s nulou a unárním symbolem pro operaci následníka je s určitou modifikací převzat z Rabinovy kapitoly rovněž v knize [1]). Probrané resp. zopakované pojmy: jazyk, axiomy (logické nebo axiomy nějaké teorie), sémantický důsledek, důkaz, sporné a bezesporné teorie, úplné a neúplné teorie, rozhodnutelné a nerozhodnutelné teorie, teorie nějaké struktury. Vaughtův test. Použití věty o kompaktnosti: nemožnost konečné axiomatizovatelnosti určitých teorií, neaxiomatizovatelnost určitých "teorií" zadaných sémanticky (třídou struktur).

Robinsonova a Peanova aritmetika Robinsonova aritmetika je neúplná. Existuje jednoduchá struktura pro aritmetický jazyk, která ukazuje, že univerzální formule (např. komutativita sčítání) nejsou "zpravidla" v Robinsonově aritmetice dokazatelné. V Peanově aritmetice lze s použitím indukce dokázat všechna "běžná" tvrzení o číslech. I Peanova aritmetika má nestandardní modely. Pojmy: aritmetický jazyk, numerály, standardní a nestandardní model, Δ_0-, Σ-, Σ_n- a Π_n-formule, aritmetická hierarchie. Pro věty o neúplnosti jsou podstatné tyto výsledky: Σ-úplnost Robinsonovy aritmetiky, rekurzívnost logické syntaxe a definovatelnost rekurzívně spočetných množin ve standardním modelu aritmetiky. To poslední je technicky obtížnější výsledek, který se redukuje na definovatelnost vhodného kódování posloupností.

Neúplnost v aritmetice Každé Σ_1-korektní rekurzívně axiomatizovatelné rozšíření Robinsonovy aritmetiky je neúplné a nerozhodnutelné (První Gödelova věta). Rovněž teorie s aritmetickým jazykem a bez (vlastních) axiomů nebo teorie množin jsou příklady nerozhodnutelných teorií. S použitím efektivně rekurzívně neoddělitelných množin či efektivně nerekurzívních množin lze předpoklad o Σ_1-korektnosti v První Gödelově větě nahradit předpokladem o bezespornosti; to je Rosserovo zobecnění První Gödelovy věty. Věta o autoreferenci (Gödelovo diagonální lemma) je založena na technickém výsledku o reprezentovatelnosti primitivně rekurzívních funkcí. Poskytuje alternativní (a klasický) důkaz První Gödelovy věty, a dále třeba výsledek o nedefinovatelnosti množiny všech pravdivých formulí ve standardním modelu aritmetiky. V Peanově aritmetice je možno formalizovat kódování posloupností a díky tomu také syntax predikátové logiky. V žádné rekurzívně axiomatizovatelné bezesporné teorii obsahující Peanovu aritmetiku nelze dokázat její vlastní bezespornost (Druhá Gödelova věta). Formule vyjadřující bezespornost je konkrétnějším příkladem pravdivé a nedokazatelné formule, než poskytuje První Gödelova věta. Druhá Gödelova věta je zajímavá i z hlediska filosofického a historického (Hilbertův program).

Gentzenovské logické kalkuly jsou použitelné k hlubším výsledkům o dokazatelnosti v Peanově aritmetice (např. že v ní lze dokázat sentenci $\mathsf{Con}(\mathsf{Q})$ vyjadřující bezespornost Robinsonovy aritmetiky), ale jsou zajímavé i samostatně. Stručný výklad o intuicionistické logice je zařazen proto, že intuicionistický kalkulus lze získat z klasického jen nepatrnou modifikací a v relevantní literatuře (Kleene [4], Takeuti [10]) se oba kalkuly probírají současně. Tato část snad poskytuje nový pohled na problematiku korektnosti a úplnosti logických kalkulů. Nejde zde tedy o souvislost intuicionistické logiky s metamatematikou aritmetiky (taková souvislost možná ani neexistuje), ani o historický a filosofický význam intuicionistické logiky (který je značný). Pojmy: sekvent, antecedent, sukcedent, kripkovský model.

Neprobraná příbuzná tématika interpretace a interpretovatelnost teorií, modální logika dokazatelnosti, eliminovatelnost řezů v gentzenovském kalkulu, Hilbert-Ackermannova (Herbrandova) věta.

Gentzenovský kalkulus GK (výroková pravidla)

A: $/ \ \langle \Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta, \varphi \rangle$

W: $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle \ / \ \langle \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \rangle \quad , \quad \langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle \ / \ \langle \Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta \rangle$

∨-r: $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \rangle \ / \ \langle \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi \rangle \quad , \quad \langle \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \rangle \ / \ \langle \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \vee \varphi \rangle$

&-l: $\langle \Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta \rangle \ / \ \langle \Gamma, \varphi \,\&\, \psi \Rightarrow \Delta \rangle \quad , \quad \langle \Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta \rangle \ / \ \langle \Gamma, \psi \,\&\, \varphi \Rightarrow \Delta \rangle$

&-r: $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \rangle, \langle \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \rangle \ / \ \langle \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \,\&\, \psi \rangle$

∨-l: $\langle \Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta \rangle, \langle \Gamma, \psi \Rightarrow \Delta \rangle \ / \ \langle \Gamma, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta \rangle$

¬-l: $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \rangle \ / \ \langle \Gamma, \neg\varphi \Rightarrow \Delta \rangle$

¬-r: $\langle \Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta \rangle \ / \ \langle \Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\varphi \rangle$

→-r: $\langle \Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi \rangle \ / \ \langle \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \to \psi \rangle$

→-l: $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \rangle, \langle \Pi, \psi \Rightarrow \Lambda \rangle \ / \ \langle \Gamma, \Pi, \varphi \to \psi \Rightarrow \Delta, \Lambda \rangle$

Cut: $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \rangle, \langle \Pi, \varphi \Rightarrow \Lambda \rangle \ / \ \langle \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda \rangle$

Kvantifikátorová pravidla kalkulu GK

∃-r: $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi_x(t) \rangle \ / \ \langle \Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x \varphi \rangle$; t substituovatelný za

∀-l: $\langle \Gamma, \varphi_x(t) \Rightarrow \Delta \rangle \ / \ \langle \Gamma, \forall x \varphi \Rightarrow \Delta \rangle$; x ve φ

∃-l: $\langle \Gamma, \varphi_x(y) \Rightarrow \Delta \rangle \ / \ \langle \Gamma, \exists x \varphi \Rightarrow \Delta \rangle$; y substituovatelná za x ve φ, y není

∀-r: $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi_x(y) \rangle \ / \ \langle \Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x \varphi \rangle$; volně v Γ, Δ, ani v $\exists x \varphi$ resp. $\forall x \varphi$

Příklady důkazů

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\langle\, A \;\Rightarrow\; A \,\rangle}{\langle\, \;\Rightarrow\; \neg A, A \,\rangle}}{\langle\, \;\Rightarrow\; \neg A \vee B, A \,\rangle} \qquad \dfrac{\langle\, B \;\Rightarrow\; B \,\rangle}{\langle\, B \;\Rightarrow\; \neg A \vee B \,\rangle}}{\langle\, A \rightarrow B \;\Rightarrow\; \neg A \vee B \,\rangle} \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\langle\, A \;\Rightarrow\; A \,\rangle}{\langle\, \;\Rightarrow\; A, \neg A \,\rangle}}{\langle\, \;\Rightarrow\; A, A \vee \neg A \,\rangle}}{\langle\, \;\Rightarrow\; A \vee \neg A \,\rangle}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\langle\, A \;\Rightarrow\; A \,\rangle}{\langle\, A \;\Rightarrow\; A \vee \neg A \,\rangle}}{\langle\, A, \neg(A \vee \neg A) \;\Rightarrow\; \,\rangle}}{\langle\, \neg(A \vee \neg A) \;\Rightarrow\; \neg A \,\rangle}}{\langle\, \neg(A \vee \neg A) \;\Rightarrow\; A \vee \neg A \,\rangle}}{\langle\, \neg(A \vee \neg A) \;\Rightarrow\; \,\rangle} \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\langle\, A \;\Rightarrow\; A, B \,\rangle}{\langle\, A, \neg A \;\Rightarrow\; B \,\rangle}}{\langle\, \neg A \;\Rightarrow\; A \rightarrow B \,\rangle} \qquad \dfrac{\langle\, A, B \;\Rightarrow\; B \,\rangle}{\langle\, B \;\Rightarrow\; A \rightarrow B \,\rangle}}{\langle\, \neg A \vee B \;\Rightarrow\; A \rightarrow B \,\rangle}$$

Příklad důkazu v predikátovém kalkulu

$\langle\, \varphi(a) \;\Rightarrow\; \varphi(a), \varphi(b) \,\rangle$; A

$\langle\, \varphi(a), \neg\varphi(a) \;\Rightarrow\; \varphi(b) \,\rangle$; ¬-l

$\langle\, \neg\varphi(a) \;\Rightarrow\; \varphi(a) \rightarrow \varphi(b) \,\rangle$; →-r

$\langle\, \neg\varphi(a) \;\Rightarrow\; \exists v \neg\psi(v), \varphi(a) \rightarrow \varphi(b) \,\rangle$; W

$\langle\, \psi(a), \psi(b) \;\Rightarrow\; \psi(b) \,\rangle$; A

$\langle\, \psi(a) \;\Rightarrow\; \neg\psi(b), \psi(b) \,\rangle$; ¬-r

$\langle\, \;\Rightarrow\; \neg\psi(b), \psi(a) \rightarrow \psi(b) \,\rangle$; →-r

$\langle\, \;\Rightarrow\; \exists v \neg\psi(v), \psi(a) \rightarrow \psi(b) \,\rangle$; ∃-r

$\langle\, \neg\varphi(a) \;\Rightarrow\; \exists v \neg\psi(v), \psi(a) \rightarrow \psi(b) \,\rangle$; W

$\langle\, \neg\varphi(a) \;\Rightarrow\; \exists v \neg\psi(v), (\varphi(a) \rightarrow \varphi(b)) \;\&\; (\psi(a) \rightarrow \psi(b)) \,\rangle$; &-r

$\langle\, \neg\varphi(a) \;\Rightarrow\; \exists v \neg\psi(v), \forall y((\varphi(a) \rightarrow \varphi(y)) \;\&\; (\psi(a) \rightarrow \psi(y))) \,\rangle$; ∀-r

$\langle\, \neg\varphi(a) \;\Rightarrow\; \exists v \neg\psi(v), \exists x \forall y((\varphi(x) \rightarrow \varphi(y)) \;\&\; (\psi(x) \rightarrow \psi(y))) \,\rangle$; ∃-r

$\langle\, \exists v \neg\varphi(v) \;\Rightarrow\; \exists v \neg\psi(v), \exists x \forall y(\ldots) \,\rangle$; ∃-l

Všimněte si, že v okamžiku použití pravidla (∀-r) a (∃-l) se proměnná b (resp. a) už nevyskytuje volně v ostatních formulích.

Cvičení

1. *Pravidlo substituce* $A \,/\, A_p(B)$ umožňuje z libovolné výrokové formule A odvodit formuli, která z ní vznikne nahrazením všech výskytů některého atomu toutéž (libovolnou) formulí. Dokažte, že množina všech tautologií je maximální bezesporná množina výrokových formulí, která je uzavřená na pravidlo substituce.

2. Sestrojte důkazy následujících sekventů ve výrokové variantě kalkulu GK.

   $\langle A \vee (A \,\&\, B) \Rightarrow A \rangle$ $\quad$ $\langle A \vee (B \,\&\, \neg B) \Rightarrow A \rangle$

   $\langle B \,\&\, \neg B \Rightarrow A \,\&\, B \,\&\, \neg B \rangle$ $\quad$ $\langle A \to B, \neg B \Rightarrow B \to C \rangle$

   $\langle A \vee (B \,\&\, C) \Rightarrow (A \vee B) \,\&\, (A \vee C) \rangle$ $\quad$ $\langle A \to B, \neg B \Rightarrow A \to C \rangle$

   $\langle (A \vee B) \,\&\, (A \vee C) \Rightarrow A \vee (B \,\&\, C) \rangle$ $\quad$ $\langle \neg(A \to B) \Rightarrow A \rangle$.

3. Rozhodněte, zda následující sekventy jsou intuicionisticky tautologické. Pokud ano, sestrojte důkaz v kalkulu GJ. Pokud ne, sestrojte kripkovský protipříklad.

   $\langle A \vee \neg A \Rightarrow \neg\neg A \to A \rangle$ $\quad$ $\langle \neg\neg\neg\neg B \Rightarrow \neg\neg B \rangle$

   $\langle \Rightarrow \neg A \vee \neg B \vee (A \to B) \vee (B \to A) \rangle$ $\quad$ $\langle A \to \neg\neg B, \neg\neg A \Rightarrow \neg\neg B \rangle$

   $\langle \neg(A \to B) \Rightarrow \neg B \rangle$ $\quad$ $\langle A \to \neg\neg B, \neg(A \to B) \Rightarrow \neg\neg B \rangle$

   $\langle \neg(A \to B) \Rightarrow \neg\neg A \rangle$ $\quad$ $\langle \neg(A \to B), \neg\neg B \Rightarrow \rangle$

   $\langle \neg(A \to B) \Rightarrow A \rangle$ $\quad$ $\langle A \to \neg\neg B \Rightarrow \neg\neg(A \to B) \rangle$.

   $\langle A \to \neg\neg B, \neg\neg A \Rightarrow \neg\neg\neg\neg B \rangle$

4. Sestrojte intuicionistický kripkovský protipříklad na následující formuli:
   $((\neg\neg p \to p) \to (p \vee \neg p)) \vee (\neg\neg p \to p)$.

5. Je-li výroková formula A klasickou tautologií, pak formule $\neg\neg A$ je intuicionistická tautologie. Dokažte.

6. Je-li ve výrokové variantě kalkulu GK dokazatelný sekvent $\langle \Gamma \Rightarrow A \rangle$, pak v GJ je dokazatelný sekvent $\langle \Gamma \Rightarrow \neg\neg A \rangle$. Dokažte.
   Návod. Je-li v GK dokazatelný sekvent $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle$, pak v GJ je dokazatelný sekvent $\langle \Gamma, \neg\Delta \Rightarrow \rangle$, kde $\neg\Delta$ je množina všech negací formulí z Δ. Toto dokažte indukcí dle počtu kroků v důkazu sekventu $\langle \Gamma \Rightarrow \Delta \rangle$. Zvláštní pozornost věnujte pravidlu &-r.

7. Nazvěme "logikou" libovolnou množinu výrokových formulí, která je uzavřena na pravidlo substituce a na pravidlo MP. Cvičení 1 říká, že klasická logika je maximální bezesporná logika. Dokažte navíc s použitím cvičení 5, že je to jediná maximální bezesporná logika, která obsahuje intuicionistickou logiku. Jak rozumíte termínu *bezesporná*?

8. Sestrojte důkazy následujících sekventů v kalkulu GJ.

   $\langle \exists x \forall y \varphi(x,y) \Rightarrow \forall y \exists x \varphi(x,y) \rangle$ $\quad$ $\langle \exists x \neg\neg\varphi(x) \Rightarrow \neg\neg\exists x \varphi(x) \rangle$

   $\langle \forall x \neg\varphi(x) \Rightarrow \neg\exists x \varphi(x) \rangle$ $\quad$ $\langle \neg\neg\forall x \varphi(x) \Rightarrow \forall x \neg\neg\varphi(x) \rangle$

   $\langle \exists x \neg\varphi(x) \Rightarrow \neg\forall x \varphi(x) \rangle$ $\quad$ $\langle \neg\forall x \neg\varphi(x) \Rightarrow \neg\neg\exists x \varphi(x) \rangle$.

   $\langle \neg\exists x \varphi(x) \Rightarrow \forall x \neg\varphi(x) \rangle$

9. Sestrojte důkazy následujících sekventů v kalkulu GK.

   $\langle \neg\forall x \varphi(x) \Rightarrow \exists x \neg\varphi(x) \rangle$

   $\langle \forall x \varphi(x) \to \psi \Rightarrow \exists x(\varphi(x) \to \psi) \rangle$ $\quad$ (x není volně ve ψ)

$\langle\, \forall x(\psi \vee \varphi(x)) \;\Rightarrow\; \psi \vee \forall x\varphi(x)\,\rangle$ (x není volně ve ψ)
$\langle\, \forall x(\varphi(x) \to \psi(x)) \;\Rightarrow\; \exists x\forall y((\varphi(x) \to \varphi(y))\ \&\ (\psi(x) \to \psi(y)))\,\rangle$.

Návod k poslednímu sekventu. Dokažte zvlášť sekventy

$\langle\, \forall x(\varphi(x) \to \psi(x)), \exists v\neg\psi(v) \;\Rightarrow\; \exists x\forall y(\ldots))\,\rangle$
$\langle\, \exists v\neg\varphi(v) \;\Rightarrow\; \exists v\neg\psi(v), \exists x\forall y(\ldots)\,\rangle$
$\langle\, \Rightarrow\; \exists v\neg\varphi(v), \exists v\neg\psi(v), \exists x\forall y(\ldots)\,\rangle$,

a pak použijte dvakrát pravidlo (cut). Důkaz druhého z těchto tří sekventů byl uveden mezi příklady. V případě prvního sekventu dokažte nejprve

$\langle\, \varphi(a) \to \psi(a), \neg\psi(a) \;\Rightarrow\; \varphi(a) \to \varphi(b)\,\rangle$ a
$\langle\, \varphi(a) \to \psi(a), \neg\psi(a) \;\Rightarrow\; \psi(a) \to \psi(b)\,\rangle$.

10. Představte si modifikaci kalkulů GK a GJ, ve kterých se pravidlo A smí použít jen tehdy, je-li jeho principální formule atomická. Dokažte, že takto modifikované kalkuly jsou ekvivalentní s původními, tj. že každý sekvent $\langle\, \varphi \Rightarrow \varphi\,\rangle$ je v nich dokazatelný bez ohledu na to, zda φ je atomická.

Literatura

[1] J. Barwise, editor. *Handbook of Mathematical Logic.* North-Holland, 1977.

[2] P. Hájek a P. Pudlák. *Metamathematics of First Order Arithmetic.* Springer, 1993.

[3] P. Hájek a V. Švejdar. Matematická logika. Praha, listopad 1994. Předběžný učební text, v elektronické podobě.

[4] S. C. Kleene. *Introduction to Metamathematics.* D. van Nostrand, 1952.

[5] P. Odifreddi. *Classical Recursion Theory.* North-Holland, Amsterdam, 1989.

[6] H. Schwichtenberg. Proof theory. V Barwise [1], kapitola D.2, str. 867–896.

[7] C. Smoryński. The incompleteness theorems. V Barwise [1], kapitola D.1, str. 819–843.

[8] C. Smoryński. Hilbert's programme. *CWI Quarterly*, 1(4), 1988.

[9] V. Švejdar. *Logika: neúplnost, složitost a nutnost.* Academia, Praha, 2002.

[10] G. Takeuti. *Proof Theory.* North-Holland, Amsterdam, 1975.

[11] A. Tarski, A. Mostowski a R. M. Robinson. *Undecidable Theories.* North-Holland, Amsterdam, 1953.