

Filozofická fakulta UK — Katedra logiky

Ročníková práce

**ALTERNATIVNÍ DEFINICE
TURINGOVSKÉ PŘEVEDITELNOSTI**

František Bártík

Vedoucí práce: doc. RNDr. Vítězslav Švejdar, CSc.

2007

Klíčová slova

Teoretická informatika, složitost, turingovská převeditelnost \leq_T , rekurzivní spočetnost v množině, rekurzivnost v množině

Abstrakt

Práce zavádí pojem turingovské převeditelnosti (\leq_T). Důraz je kladen na definici podle Smoryňského (rekurzivnost v množině), využívající ternární rekurzivně spočetnou relaci. Dále jsou dokázány základní vztahy mezi rekurzivní spočetností v množině, rekurzivností v množině, operací skoku a aritmetickou hierarchií.

Poděkování

Chtěl bych poděkovat vedoucímu práce doc. Švejdarovi za hodnotné podněty, kritické připomínky a poskytnutí podkladů. Při sazbě této práce bylo využito částí maker vytvořených doc. Švejdarem.

Kontakt na autora	:	frantisekbartik@gmail.com
Elektronická verze práce	:	www.???
Grafická úprava a sazba systémem \LaTeX	:	autor
Akademický rok vypracování	:	2006/2007

© FRANTIŠEK BÁRTÍK

Obsah

1	Úvod	3
2	Turingovská převeditelnost	5
2.1	Neformální definice turingovské převeditelnosti pomocí Turingových strojů	5
2.2	Rekurzivní spočetnost v množině	7
2.3	Rekurzivnost v množině a turingovská převeditelnost	9
3	Základní poznatky o rekurzivní spočetnosti v množině	11
3.1	Elementární poznatky o relativizované rekurzivní spočetnosti .	11
3.2	Uzavřenost množiny $RS(A)$ na různé operace	15
3.3	Tranzitivita turingovské převeditelnosti	18
4	Operace skoku	21
4.1	Definice skoku	21
4.2	Skok, relace RS a aritmetická hierarchie	23
5	Dosažené výsledky	27
A	Ekvivalence obou definic turingovské převeditelnosti	28
B	Kódování množin	30
C	Seznam literatury a použitého značení	34

1 Úvod

Složitost množiny úzce souvisí se střídáním kvantifikátorů v definující podmínce (aritmetická hierarchie). Užitečným nástrojem při studiu složitosti je myšlenka převeditelnosti — pokud je možné „převádět“ jednu množinu na druhou, pak jejich složitosti vzájemně souvisejí. „Složitost“ množin bude dále zkoumána z hlediska (možnosti) jejich vzájemného převádění — nikoli z hlediska náročnosti vlastních výpočtů prováděných při převádění. Z převeditelnosti podle jedné definice může vyplývat převeditelnost podle jiné definice; jednotlivé definice můžeme takto uspořádávat. Definice převeditelnosti vybudované v této práci tvoří dokonce jistou „hierarchii“ podobně jako např. Chomského hierarchie formálních jazyků. V Chomského hierarchii stojí „nejvýše“ jazyky rozpoznatelné Turingovými stroji, což je vlastně nejobecnější definice jazyků identifikovatelných reálnými výpočetními modely. Předchozí gramatická věta poskytuje návod a motivaci jak vybudovat tzv. turingovskou převeditelnost.

Je však potřeba provést posun v chápání Turingova stroje, který musí mít pro účel převádění „informace“ o množině, na kterou převádíme. Tento posun spočívá v definování orákula („černé skříňky řešící otázku, zda prvek leží v určité množině“) a Turingova stroje s orákulem. S těmito ideami se lze ostatně setkat např. v mnoha partiích teoretické informatiky.

Pomocí teorie rekurzivních funkcí lze formalizovat veškeré skutečnosti formalizovatelné pomocí Turingových strojů — tedy i turingovskou převeditelnost. V práci zavedeme alternativní definici turingovské převeditelnosti využívající pojmů teorie rekurzivních funkcí. Zdůrazněme, že slovem alternativní není míněno slovo neekvivalentní. Důkaz ekvivalence obou definic bude nastíněn v jednom z dodatků. Ústřední tématem práce představuje rozvíjení základů teorie této alternativní turingovské převeditelnosti.

Mnoho z dosažených výsledků se týká vlastností operace skoku. Skok je v podstatě množinová funkce „zvyšující“ složitost množiny. Tato zobrazení je vlastně relativizací konstrukce množiny K z prázdné množiny.

Práce rozvíjí poznatky o převeditelnosti přednášené na katedře logiky Filozofické fakulty UK v kurzu „Teorie algoritmů“. Zároveň využívá výsledky této přednášky a to především:

- definice relace \leq_m a její základní vlastnosti,
- definice aritmetické hierarchie a její základní vlastnosti,

- definice množiny K a vztahy $K \notin OR$, $K \in RS$, $K \not\leq_m \bar{K}$.

Kromě ovládnutí příslušných témat ze zmiňované přednášky (a elementárních poznatků logiky a teorie množin) nejsou kladeny na znalosti čtenáře žádné další specifické nároky. Prostředky využívané při kódování konečných množin jsou shrnuty v doplňku „Kódování množin“. Nevhodnou volbou kódování se mohou výklad problematizovat (např. když úloha $x \in D_u$ nebude algoritmicky řešitelná). Zmiňovaný doplněk uvádí jednoduché podmínky na kódování, při jejichž splnění můžeme bez obav užívat elementární množinové konstrukce v teorii rekurzivních funkcí a uvádí konkrétní příklad kódování.

2 Turingovská převeditelnost

2.1 Neformální definice turingovské převeditelnosti pomocí Turingových strojů

Běžně se turingovská převeditelnost definuje několika vzájemně ekvivalentními způsoby. Pro tuto práci ústřední definice založená na teorii rekurzivních funkcí pochází od Smoryňského. Historicky první definice turingovské převeditelnosti využívá pojmu Turingova stroje a je vlastně motivována touto po vybudováním co „možná nejobecnější rozumné“ definice převeditelnosti „implementovatelné na reálné výpočetní modely“.

Z didaktických a motivačních důvodů se nejprve zabývejme historicky původní definicí turingovské převeditelnosti, která využívá názorný výpočetní model — Turingovy stroje. Vzhledem k směrování práce je tato podkapitola zaměřená jen na nastínění nejdůležitějších myšlenek.

Jako východisko předpokládejme, že „máme informaci o množině X “ takovou, že jsme schopni rozhodovat náležitě do této množiny X . Formalizací intuitivní idee „máme informaci o X “ je orákulum. Pojem orákula je v teoretické informatice velmi frekventovaný — například v teorii výpočetní složitosti.

Idea definice 1. Orákulum Orákulum je (hypotetické) výpočetní „zařízení“, které řeší určitou úlohu. Touto úlohou je obvykle úloha:

- neřešitelná Turingovými stroji,
- neřešitelná Turingovými stroji v určitém časovém nebo paměťovém prostoru,
- o které není známo, zda je řešitelná Turingovými stroji.

■

Idea definice 2. Orákulum množiny Orákulum množiny A je orákulum, které řeší úlohu $x \in A$. ■

V této podkapitole následuje ze striktně matematického hlediska dosti vágní definice turingovské převeditelnosti, která má však situaci jen ožřejmit. Podrobný výklad této problematiky, který plně splňuje požadavky na přesnost, poskytuje kniha [4] nebo [2].

Idea definice 3. Turingovská převeditelnost (\leq_T -převeditelnost) Množina B je turingovsky převeditelná na množinu A (symbolicky $B \leq_T A$), jestliže úlohu $x \in B$ řeší nějaký Turingův stroj, který „má k dispozici orákulum množiny A “.

Turingův stroj, který „má k dispozici orákulum množiny A “, lze považovat za ekvivalentní následujícímu výpočetnímu modelu. Mějme stroj, který se od Turingova stroje liší tím, že dostane-li se do stavu „ORÁKULUM“, provede následující operace:

- Je-li na levo od čtecí hlavy n znaků 1 a $(n+1)$ ní znak je 0 a je-li $n \in A$, pak zapíše na pásku „ANO“.
- Je-li na levo od čtecí hlavy n znaků 1 a $(n+1)$ ní znak je 0 a je-li $n \in \bar{A}$, pak zapíše na pásku „NE“.
- V ostatních případech zapíše na pásku „CHYBA“.
- Přejde do stavu jiného než stav „ORÁKULUM“.

Jinými slovy: Turingův stroj „získá z definice možnost“ během přechodu z jednoho stavu do druhého „určit s pomocí orákula“ hodnotu charakteristické funkce dané množiny.¹ ■

Idea definice 4. Turingův stroj s orákulem Turingův stroj „mající k dispozici orákulum A “ nazýváme „Turingovým strojem s orákulem A “. ² ■

Kniha [4] uvádí další konkrétní analogické realizace výše uvedeným způsobem zobecněného Turingova stroje. Lze si například představit, že Turingův stroj má pomocnou pásku. Na tu zapíše číslo a může provést s orákulem něco podobného jako, řečeno programátorsky, zavolání podprogramu. Výsledkem tohoto volání bude zapsání informace, zda číslo na pomocné pásce je nebo není v množině, na pomocnou pásku. Podobně by šlo místo Turingova stroje, který „má k dispozici orákulum množiny A “ využít představu, že k výpočetnímu modelu rekurzivních funkcí se „přidá“ jako další primitivní funkce funkce c_A .

¹Autor se domnívá, že na základě uvedené konkrétní realizace je zřejmá vhodnost použití formulace „Turingův stroj má k dispozici orákulum množiny A “.

²Tedy množina B je turingovsky převeditelná na množinu A , když existuje Turingův stroj s orákulem množiny A řešící úlohu náležením do B .

Věta 1. *Turingovská převeditelnost je reflexivní a tranzitivní* \square

Náznak důkazu: Důkaz je založen na konstrukci příslušných Turingových strojů s orákulem A . Korektnost³ zkonstruovaných strojů není ověřována, protože je evidentní.

Při rozhodování, zda $x \in A$, se Turingův stroj jednoduše „zeptá“ orákula a skončí. Výsledkem činnosti uvedeného stroje je odpověď, zda $x \in A$. Existence popsaného stroje implikuje reflexivitu turingovské převeditelnosti. Položme libovolně (ale pevně) $A \leq_T B$ (a necht' $T_{A \leq_T B}$ je definicí předpokládaný Turingův stroj) a $B \leq_T C$ (a necht' $T_{B \leq_T C}$ je definicí předpokládaný Turingův stroj). Nyní dokažme existenci Turingova stroje $T_{A \leq_T C}$, jehož existence by implikovala $A \leq_T C$.

V programátorské praxi se často pracuje s pojmem „volání podprogramu“. Představme si, že z $T_{B \leq_T C}$ „vyrobíme“ podprogram IN_B volaný s jednou proměnnou, jehož výstupem je pravdivostní hodnota. Podprogram IN_B rozhodne, zda daný prvek náleží množině B (tj. $IN_B(x) \Leftrightarrow x \in B$). Nyní stačí modifikovat $T_{B \leq_T C}$ tak, že každé „volání“ orákula nahradíme „voláním“ podprogramu IN_B .

Nyní si již stačí uvědomit, že výpočet Turingova stroje je definovaný rekurzivně a výsledky volání orákula a podprogramu jsou stejné. Zkonstruovaný Turingův stroj je hledaným strojem $T_{A \leq_T C}$. Q.E.D

Naznačená myšlenka bude později formalizována pomocí tzv. Smoryňského definice turingovské převeditelnosti.

2.2 Rekurzivní spočetnost v množině

Pojem rekurzivně spočetné množiny je čtenáři jistě známý. Cílem této podkapitoly je tento pojem zobecnit (relativizovat) na pojem rekurzivní spočetnost v množině.

Turingův stroj s orákulem při výpočtu, který konverguje, provede jen konečný počet výpočetních kroků a projde jen konečným počtem stavů. Tedy Turingův stroj realizovaný popsaným způsobem se nachází během výpočtu ve stavu „ORÁKULUM“ jen konečněkrát. Je patrné, že na výpočet má vliv jen **konečně** mnoho hodnot charakteristické funkce. Jinými slovy stačí brát v úvahu jen konečně „dat“. Kdybychom znali tuto konečnou množinu relevantních hodnot, nemusili bychom požadovat informaci o všech hodnotách,

³Tj. otázka, zda stroj skutečně danou úlohu řeší.

kteřou poskytuje orákulum, ale stačilo by se omezit jen na tuto konečnou množinu. Z těchto ideí vychází alternativní definice turingovské převeditelnosti vybudovaná v této kapitole (využito [6]). Naposledy nyní zdůrazněme, že obě uváděné definice turingovské převeditelnosti jsou ekvivalentní — podrobnosti jsou uvedeny částečně ve vlastním textu a schrnuty v doplňku „Ekvivalence obou definic turingovské převeditelnosti“.

Rekurzivní spočetnost v množině

Definice 5. *Rekurzivní spočetnost v množině (podle Smoryňského)*
Množina B je rekurzivně spočetná v A , právě když existuje rekurzivně spočetná ternární relace R , pro kterou platí:

$$x \in B \Leftrightarrow \exists u \exists v : D_u \subseteq A \ \& \ D_v \subseteq \bar{A} \ \& \ R(x, u, v), \quad (*)$$

neboli:

$$B = \{x; \exists u \exists v : D_u \subseteq A \ \& \ D_v \subseteq \bar{A} \ \& \ R(x, u, v).\}$$

Symbolicky píšeme „ $B \in \text{RS}(A)$ “. O rekurzivní spočetnosti v množině mluvíme také jako o relativizaci rekurzivní spočetnosti. ■

Definice 6. *Třída $\text{RS}(A)$ představuje třídu všech množin rekurzivně spočetných v množině A .* ■

Protože v definici není uvedena konkrétní volba kódování, je legitimní namítat její nekorektnost; důkaz korektnosti * je uveden v doplňku „Kódování množin“.

Komentář k definici rekurzivní spočetnosti v množině: Již byly naznačeny ideové vazby připravované definice a definice s pomocí Turingových strojů, nyní obecně formulované myšlenky konkretizujme. Je zřejmé, že by bylo dobré volit množinu $D_u \cup D_v$ tak, aby obsahovala všechna čísla, na která se „dotáže“ Turingův stroj orákula během výpočtu. Znalost množin D_u, D_v z hlediska výpočtu je ekvivalentní možnosti použití orákula. Podobně jako ve větě o normální formě relace R „hledá“ minimalizací kód výpočtu Turingova stroje s orákulem, což je možné vzhledem k tomu, že úloha rozhodnout, zda prvek leží v množině D_u nebo D_v je rekurzivní. Podrobněji se důkazu ekvivalence obou definic věnuje jeden z dodatků, který dokonce obsahuje náznak důkazu této ekvivalence.

Třída rekurzivně spočetných množin je vlastně třídou množin rekurzivně spočetných v prázdné množině — rekurzivní spočetnost v množině je relativizací pojmu rekurzivní spočetnost. V tom spočívá logika označení „rekurzivní spočetnost v množině“.

Věta 2. *Platí* : $RS = RS(\emptyset)$ \square

Důkaz: Dokažme nejprve $RS(\emptyset) \subseteq RS$. Nejprve přepíšme definici *:

$$x \in B \Leftrightarrow \exists u \exists v : D_u \subseteq \emptyset \ \& \ D_v \subseteq \bar{\emptyset} \ \& \ R(x, u, v)$$

Je-li však podle definice $R \in RS$, je celá podmínka na pravé straně * rekurzivně spočetná. Tím je dokázáno $RS(\emptyset) \subseteq RS$. Nyní se zabývejme opačnou inkluzí. Chceme tedy pro libovolnou množinu $B \in RS$ dokázat $B \in RS(\emptyset)$. Z definice kódování vyplývá $\exists u, v : D_u = \emptyset \ \& \ D_v = \emptyset$.

$$x \in B \Leftrightarrow \exists u \exists v (D_u \subseteq \emptyset \ \& \ D_v \subseteq \bar{\emptyset} \ \& \ x \in B)$$

Tedy hledaná * podmínka je $\exists u \exists v (D_u \subseteq \emptyset \ \& \ D_v \subseteq \bar{\emptyset} \ \& \ x \in B)$. Tím jsou dokázány obě inkluze a současně je tím dokázána i zkoumaná rovnost.

Q.E.D

Rekurzivní spočetnost v množině není hledanou turingovskou převeditelností, protože např. není tranzitivní.

Věta 3. *Relativizovaná rekurzivní spočetnost není tranzitivní*

$\neg \forall A, B, C : A \in RS(B) \ \& \ B \in RS(C) \Rightarrow A \in RS(C)$ \square

Důkaz: Množina K je rekurzivně spočetná (resp. $K \in RS(\emptyset)$). Zároveň množina je rekurzivně spočetná ve svém doplňku; toto poměrně zřejmé tvrzení bude dokázáno v následující kapitole — samozřejmě tento slíbený důkaz nebude využívat právě dokazovanou větu (důkaz kruhem). Z tohoto tvrzení vyplývá $K \in RS(\emptyset) \ \& \ \bar{K} \in RS(K)$. Avšak víme, že množina \bar{K} není rekurzivně spočetná (resp. $\bar{K} \notin RS(\emptyset)$). Q.E.D

2.3 Rekurzivnost v množině a turingovská převeditelnost

Zamysleme se nejprve nad otázkou, proč vlastně není relace rekurzivní spočetnosti v množině tranzitivní. Vágně řečeno proto, že prvním převedením „ztrácíme informaci“ o tom, které prvky v obrazu neleží. Jinak řečeno nejsme


schopni úlohu náležení rozhodovat, ale pouze přijímat. Po této analýze je řešení nasnadě — požadovat nejen rekurzivní spočetnost v množině, ale i v jejím doplňku.

Úvahy provedené v posledních třech gramatických větách jsou zajímavým způsobem analogické s Postovou větou. Postova věta totiž tvrdí, že rekurzivně spočetná množina, která má rekurzivně spočetný doplněk, je nutně rekurzivní. Definice turingovské převeditelnosti vychází přímo z pojmu rekurzivnost v množině. Idea definování rekurzivnosti v množině je tedy prakticky analogická myšlenka Postovy věty.

Rekurzivnost v množině a turingovská převeditelnost

Definice 7. *Rekurzivnost v množině* Množina A je rekurzivní v B , pokud A i \bar{A} jsou rekurzivně spočetné v B . Symbolicky píšeme „ $A \in R(B)$ “. ■

Rekurzivnost v množině je opět relativizací pojmu rekurzivní množiny — důkaz bude uveden v dalším výkladu. Následuje alternativní definice turingovské převeditelnosti, která je pro tuto práci ústřední definicí.

Definice 8. *Turingovská převeditelnost* Množina A je turingovsky převeditelná na B , pokud A je rekurzivní v B . Symbolicky píšeme „ $A \leq_T B$ “. ■ 

3 Základní poznatky o rekurzivní spočetnosti v množině

Tato a následující kapitola uvádí jednoduché ozřejmující příklady a ukazuje základní vlastnosti teorie rekurzivní spočetnosti v množině. Ukážeme, například že:

- že turingovská převeditelnost je tranzitivní relace,
- že třída rekurzivně spočetných množin v množině je uzavřena na operace průniku, sjednocení, existenční kvantifikace a omezené univerzální kvantifikace,
- vztah rekurzivní spočetnosti v množině k operaci skoku,
- že rekurzivní spočetnost v množině a operace skoku úzce souvisejí s aritmetickou hierarchií.

3.1 Elementární poznatky o relativizované rekurzivní spočetnosti

Cílem této podkapitoly je zkoumat třídu všech množin s pomocí pojmů vybudovaných v předchozí kapitole. Především pak bude ukázáno, že množina a její doplněk jsou turingovsky převeditelné, některé význačné vlastnosti třídy OR a uzavřenost třídy $RS(A)$ na různé množinové operace.

V následujícím příkladu bude předvedeno několik jednoduchých řešených příkladů ukazujících použití podmínky *. V prvních čtyřech bodech následujícího příkladu, lze nahradit požadavek rekurzivní spočetnosti silnějším požadavkem rekurzivnosti.

Příklad 1. *Doplněk a prvek třídy RS*

Doplněk

- I. $A \in RS(A)$ III. $\bar{A} \in RS(A)$
II. $A \in RS(\bar{A})$ IV. $A \times \bar{A} \in RS(A)$

Prvek třídy RS

- V. $A \in RS \Rightarrow A \in RS(B)$



Řešení : Podle definice * stačí dokázat, že existuje pro jednotlivé body příkladu příslušná relace. Důkaz existence relace provedeme jednoduše zvolením vhodné relace a dokázáním korektnosti této volby.

Z faktu $A \in \text{RS}$ (pátý bod) plyne, že existuje relace $R_{\text{RS}} \in \text{RS}$ splňující $A = \{x; R_{\text{RS}}(x)\}$. Poslední výraz však představuje velmi speciální tvar podmínky *:

$$R_{\text{RS}}(x) \Leftrightarrow \exists u \exists v (D_u \subseteq B \ \& \ D_v \subseteq \overline{B} \ \& \ R_{\text{RS}}(x)) \Leftrightarrow x \in A$$

Pro názornost si je možno představovat, že $D_u \cup D_v$ je prázdná množina — což ilustruje fakt, že z hlediska řešení úlohy $x \in A$ je množina B nepodstatná. Za D_u a D_v lze volit bez újmy na obecnosti vždy — bez ohledu na B — volit množinu \emptyset :

$$\begin{aligned} \exists u \exists v (D_u \subseteq B \ \& \ D_v \subseteq \overline{B} \ \& \ R_{\text{RS}}(x)) &\Leftrightarrow \exists u \exists v (D_u \subseteq B \ \& \ D_v \subseteq \overline{B} \ \& \\ &\ \& \ (R_{\text{RS}}(x) \ \& \ D_u = \emptyset \ \& \ D_v = \emptyset)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \exists u \exists v (D_u \subseteq B \ \& \ D_v \subseteq \overline{B} \ \& \ (R_{\text{RS}}(x) \ \& \ D_u = \emptyset \ \& \ D_v = \emptyset)) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\exists u \exists v (D_u = \emptyset \ \& \ D_v = \emptyset) \ \& \ (R_{\text{RS}}(x))) & \end{aligned}$$

Pravá strana je velmi názorná. Zřejmě platí $\exists u \exists v : D_u = \emptyset \ \& \ D_v = \emptyset$. Tím je dokončeno řešení pátého bodu. Dokončíme i zbývající body.

Nejprve ve stručnosti předešleme idee konstrukcí vhodných relací pro první dva body příkladu:

1. postačuje požadavek, aby prvek x ležel v nějaké množině D_u ,
2. postačuje požadavek, aby prvek x ležel v nějaké množině D_v .

Čtenář již možná tuší, že nebude potřeba „uvažovat“ všechny členy pravé strany podmínky *; např. v druhém bodě ($A \in \text{RS}(\overline{A})$) stačí uvažovat jen podtržené části následujícího výrazu.

$$\exists u \exists v : D_u \subseteq A \ \& \ \underline{D_v \subseteq \overline{A}} \ \& \ \underline{R(x, u, v)}$$

Tuto situaci ilustruje představa výpočtu Turingovým strojem. Turingův stroj se „zeptá“ orákula, zda $x \in A$ a skončí. Je-li odpověď „NE“, pak platí $x \notin A$ (resp. $x \in \overline{A}$). Naprosto přesně v souladu s komentářem k definici rekurzivnosti v množině a uvedenou konstrukcí Turingova stroje může nyní napsat tvar hledané relace:

$$D_u = \emptyset \ \& \ D_v = \{x\}$$

Z hlediska podmínky * ekvivalentně (z hlediska samotné relace však neekvivalentně) můžeme relaci volit jednodušeji jako $x \in D_v$. Zkonstruováním příslušné relace je téměř podáno řešení druhého bodu příkladu.

Z identity $A = \overline{\overline{A}}$ plyne, že druhý a třetí bod příkladu jsou ekvivalentní. Proto stačí dokázat jen druhý bod. Způsob řešení prvního bodu je naprosto analogický — hledanou relací je relace $x \in D_u$.

Následují „nezbytné“ členy podmínky * pro jednotlivé dokazované body příkladu:

$$\exists u \exists v : \begin{cases} I & D_u \subseteq A \ \& \ (x \in D_u) \\ II & D_v \subseteq \overline{A} \ \& \ (x \in D_v) \\ IV & D_u \subseteq A \ \& \ D_v \subseteq \overline{A} \ \& \\ & \ \& \ (\exists x_L, \exists x_R : x_L \in D_u \ \& \ x_R \in D_v \ \& \ x = \langle x_L; x_R \rangle) \\ V & R_{RS}(x) \end{cases}$$

Pro úplnost ještě výslovně uvedmě, že hledanou relací v čtvrtém (resp. prvním) bodě je:

$$\begin{aligned} & \exists x_L, \exists x_R : x_L \in D_u \ \& \ x_R \in D_v \ \& \ x = \langle x_L; x_R \rangle \\ & \text{(resp. } x \in D_u) \end{aligned}$$

Nyní zbývá dokázat již jen korektnost dosavadních konstrukcí. Věnujme se postupně jednotlivým bodům:

1. Je-li $x \in D_u$ a $D_u \subseteq A$, pak nutně platí $x \in A$. Zároveň však je-li $x \in A$, pak existuje množina D_u (např. $\{x\}$), že $x \in D_u$. Dosazením do definice * tedy získáme skutečně množinu A .

2. Úvaha je naprosto analogická předchozí úvaze.
3. Vyplývá z předchozího bodu.
4. Úvaha je nyní jen komplikovanější. Náleží-li x do $A \times \overline{A}$, pak existuje množina D_u obsahující $(x)_1$ (např. $\{(x)_1\}$) a množina D_v obsahující $(x)_2$ (např. $\{(x)_2\}$). Je-li $(x)_1 \in D_u$ a $(x)_2 \in D_v$, pak nutně platí $x \in A \times \overline{A}$.
5. Korektnost byla zdůvodněna výše.

✓

Lemma 4. *Množina je \leq_T -převoditelná na svůj doplněk* $A \leq_T \overline{A}$ □

Důkaz: Toto tvrzení je očividně důsledkem předchozího příkladu. Q.E.D

Následující příklad, budeme řešit již méně podrobně než příklad předchozí.

Příklad 2. $A \times \overline{A} \leq_T A$ □

Řešení: Podle definice turingovské převoditelnosti stačí dokázat dva výroky ($A \times \overline{A} \in RS(A)$ a $\overline{(A \times \overline{A})} \in RS(A)$). První z výroků byl však již dokázán v předchozím příkladě.

Nyní již stačí najít rekurzivně spočetnou relaci figurující v definici * aplikované na druhý výraz, který se dá přepsat následujícím způsobem:

$$\overline{(A \times \overline{A})} = (A \times A) \cup (\overline{A} \times \overline{A}) \cup (\overline{A} \times A)$$

Toto přepsání je pouhé využití základních poznatků teorie množin. Hledanou relací je samozřejmě například relace:

$$(\exists x_L, x_R \in D_u \ \& \ x = \langle x_L, x_R \rangle) \vee (\exists x_L, x_R \in D_v \ \& \ x = \langle x_L, x_R \rangle) \vee (\exists x_R \in D_u \ \& \ \exists x_L \in D_v \ \& \ x = \langle x_L, x_R \rangle)$$

Je-li totiž splněna tato relace, musí být splněna jedna z disjunkcí. Splnění jakékoli z disjunkcí vylučuje $x \in (A \times \overline{A})$. Druhý směr je podobně triviální.

✓

Nalezením této relace je dokončeno řešení příkladu. Zároveň však byl naznačen důkaz uzavřenosti třídy $RS(A)$ na sjednocení (a součin); tato problematika bude podrobněji studována v dalším výkladu. Sjednocení množin totiž „odpovídá“ použití disjunkce na příslušné relace. Nyní se zabýváme zajímavějším tvrzením.

Věta 5. Vztah turingovké převeditelnosti a \leq_m -převeditelnosti Platí:

$$A \leq_m B \Rightarrow A \leq_T B$$

Opačná implikace však neplatí. \square

Důkaz: Řešení se provádí opět stejným způsobem. Stačí si uvědomit, že množiny jsou \leq_m -převáděny nějakou funkcí f . Napovězme již jen tvar vhodných relací:

- $x = f(y)$ & $y \in D_u$ — relace pro $A \in RS(B)$
- $x = f(y)$ & $y \in D_v$ — relace pro $\bar{A} \in RS(B)$

Nyní si již stačí opět uvědomit, které prvky mohou množiny D_u a D_v obsahovat. (Což však přesně koresponduje s definicí \leq_m -převeditelnosti.)

Z předchozího příkladu víme, že množina je turingovsky převeditelná na svůj doplněk — $K \leq_T \bar{K}$; což však neplatí pro \leq_m -převeditelnost (podrobnosti viz [7]). Tento příklad ukazuje, že opačná implikace neplatí. Q. E. D.

3.2 Uzavřenost množiny $RS(A)$ na různé operace

Lemma 6. $A \in OR \Leftrightarrow RS(A) = RS$ \square

Důkaz : V prvním (resp. druhém) bodě je dokázán směr \Rightarrow (resp. \Leftarrow).

1. Zabýváme se nejprve implikací zleva do prava. Protože $A \in OR$, je rekurzivní i relace $D_u \subseteq A$ & $D_v \subseteq \bar{A}$. Mějme libovolnou rekurzivně spočetnou ternární relaci R , pak podmínka $*$, do které dosadíme za rekurzivně spočetnou relaci právě relaci R , je rovněž rekurzivně spočetná.

2. Dokazujeme sporem; tedy předpokládejme $A \notin \text{OR}$ (resp. $A \in \text{RS} \setminus \text{OR}$ nebo $A \notin \text{RS}$). Je-li $A \in \text{RS} \setminus \text{OR}$, pak $\overline{A} \notin \text{RS}$ (Postova věta). Podle předchozího příkladu platí $\overline{A} \in \text{RS}(A)$ a tedy $\overline{A} \in \text{RS}$. Je-li dokonce $A \notin \text{RS}$, pak z reflexivity rekurzivní spočetnosti plyne, že $A \in \text{RS}(A)$ implikuje $A \in \text{RS}$. Z obou možností plyne spor s $\text{RS}(A) = \text{RS}$.

Dokázáním obou směrů implikace je dokázána kýžená ekvivalence. Q. E. D.

Věta 7. *Třída $\text{RS}(A)$ je uzavřena na operace sjednocení, průniku, existenční kvantifikaci a omezenou kvantifikaci.* \square

Důkaz : Nejprve dokazujeme uzavřenost na operace sjednocení a průniku. Nechť B_1 náleží $\text{RS}(A)$ (resp. $B_2 \in \text{RS}(A)$), pak existují ternární relace R_1 (resp. R_2) generující množinu B_1 (resp. B_2).

$$x \in B_1 \Leftrightarrow \exists u_1 \exists v_1 : D_{u_1} \subseteq A \ \& \ D_{v_1} \subseteq \overline{A} \ \& \ R_1(x, u_1, v_1)$$

resp. $x \in B_2 \Leftrightarrow \exists u_2 \exists v_2 : D_{u_2} \subseteq A \ \& \ D_{v_2} \subseteq \overline{A} \ \& \ R_2(x, u_2, v_2)$

Nyní již stačí napsat jen tvar ternárních relace R (resp. $R_{\&}$):

$$x \in (B_1 \underset{\text{resp.} \cap}{\cup} B_2) \Leftrightarrow \exists u \exists v : D_u \subseteq A \ \& \ D_v \subseteq \overline{A} \ \& \ \underset{\text{resp.} R_{\&}}{R_{\vee}}(x, u, v)$$

$$\underset{\text{resp.} R_{\&}}{R_{\vee}} := (\exists u_1, u_2 \exists v_1, v_2 : D_{u_1} \subseteq D_u \ \& \ D_{u_2} \subseteq D_u \ \& \ \& \ D_{v_1} \subseteq D_v \ \& \ D_{v_2} \subseteq D_v \ \& \ (R_1(x, u_1, v_1) \underset{\text{resp.} \&}{\vee} R_2(x, u_2, v_2))$$

Tím, že se podařilo najít $R_{\vee} \in \text{RS}$ (resp. $R_{\&} \in \text{RS}$), byla dokázána uzavřenost třídy $\text{RS}(A)$ na sjednocení (resp. průnik).

Kvantifikací je míněno vytvoření množiny B z A :

$$B := \{x; \underset{\text{resp.} \forall y \leq n}{\exists y}, \langle x, y \rangle \in A\}$$

Omezená univerzální kvantifikace Je-li pro všechna $m \leq n$ „dovědčeno“ $\langle x, m \rangle \in A$ množinami $D_{u(m)} \subseteq A$ a $D_{v(m)} \subseteq \overline{A}$, pak platnost omezené univerzální kvantifikace lze „dovědčit“ RS relací a množinami „obsahujícími potřebné svědky“, $\cup_{m \leq n} D_{u(m)} \subseteq A$ a $\cup_{m \leq n} D_{v(m)} \subseteq \overline{A}$, které jsou samozřejmě konečné. Formálněji je úvaha o sjednocení množin svědků provedena v následujícím důkazu tranzitivity turingovské předveditelnosti; zmíněný důkaz může sloužit jako „návod“ jak napsat přesný důkaz uzavřenosti na omezenou univerzální kvantifikaci.

Existenční kvantifikace Po přidání jednoho existenčního kvantifikátoru před RS podmínku samozřejmě zůstaneme v třídě RS .

$$x \in B \Leftrightarrow \exists u, v : D_u \subseteq A \ \& \ D_v \subseteq \bar{A} \ \& \ R(x, u, v)$$

$$\{x; \exists y : \langle x, y \rangle \in B\} = \{x; \exists u, v : D_u \subseteq A \ \& \ D_v \subseteq \bar{A} \ \& \ (\exists y : R(\langle x, y \rangle, u, v))\}$$

$$R(x, u, v) \in RS \Rightarrow \exists y : R(\langle x, y \rangle, u, v) \in RS$$

Q.E.D

Definice 9. Nesrovnatelnost vůči \leq_x -převeditelnosti Množiny A a B jsou nesrovnatelné vůči \leq_x -převeditelnosti, pokud $A \not\leq_x B$ i $B \not\leq_x A$. ■

Definice 10. Ekvivalence vůči \leq_x -převeditelnosti Množiny A a B jsou ekvivalentní vůči \leq_x -převeditelnosti, pokud $A \leq_x B$ i $B \leq_x A$. ■

Definice 11. Stupeň převeditelnosti vůči \leq_x -převeditelnosti Stupeň převeditelnosti je vůči inkluzi největší množina množin po dvou ekvivalentních vůči \leq_x -převeditelnosti. ■

Příklad 3. Příklady k pojům „nesrovnatelnost (resp. ekvivalence) vůči převeditelnosti“ a „stupeň převeditelnosti“:

Nesrovnatelnost množin vůči převeditelnosti:

			\leq_1	\leq_m	\leq_T
\emptyset	a	N	ano	ano	ne
$\{1\}$	a	$\{1, 2\}$	ano	ne	ne
$\{1\}$	a	K	ano	ne	ne
K	a	\bar{K}	ano	ano	ne
A	a	A	ne	ne	ne

Ekvivalence množin vůči převeditelnosti:

			\leq_1	\leq_m	\leq_T
\emptyset	a	N	ne	ne	ano
$\{1\}$	a	$\{1; 2\}$	ne	ano	ano
\bar{K}	a	K	ne	ne	ano
\emptyset	a	K	ne	ne	ne
A	a	A	ano	ano	ano
$\{1; 2; 3\}$	a	$\{7; 13; 2879\}$	ano	ano	ano

Stupeň převeditelnosti:

	\leq_1	\leq_m	\leq_T
OR	ne	ne	ano
RS	ne	ne	ne

■

V této chvíli se může zdát pravděpodobné, že třída rekurzivně spočetných relací je stupeň ekvivalence vůči turingovské převeditelnosti. Ve skutečnosti tomu tak zdaleka není.

Friedberg-Mučnikova věta

Při hlubším zkoumání se ukáže, že turingovská převeditelnost je možná až překvapivě slabá. Na tomto místě poznamenejme například, že třída $RS(\emptyset)$ není stupněm převeditelnosti vůči turingovské převeditelnosti; dokonce existují turingovsky nesrovnatelné rekurzivně spočetné množiny. Tento výsledek, přesahující rámec tohoto pojednání, se nazývá Friedberg-Mučnikova věta (dále jen FM). Důkaz věty je poměrně zajímavý (ale i technicky náročný) a lze se s ním seznámit v [4] nebo ročníkové práci [8]. Na druhou stranu existuje více Σ_1 -kompletních množin vůči turingovské převeditelnosti než vůči \leq_m -převeditelnosti (příklady jsou uvedeny např. v [4]).

3.3 Tranzitivita turingovské převeditelnosti

V této podkapitole bude reformulován důkaz tranzitivity, provedený v podkapitole „Neformální definice turingovské převeditelnosti pomocí Turingových strojů“, do „jazyka“ teorie rekurzivní spočetnosti v množině — jedná se vlastně o příklad částečně ozřejmující vztah obou definic turingovské převeditelnosti. Předešleme ještě, že množiny „množin svědků“ budou značeny $D_{u \cup}$ (resp. $D_{v \cup}$).

Věta 8. *Tranzitivita turingovské převeditelnosti* *Turingovská převeditelnost je tranzitivní.*

Důkaz : Z předpokladů $A \leq_T B$ a $B \leq_T C$ dokažme $A \in RS(C)$. Položme relace podle definice * následujícím způsobem:

$$\begin{aligned}
A &= \{x; \exists u, v : D_u \subseteq B \ \& \ D_v \subseteq \overline{B} \ \& \ R_{A \in \text{RS}(B)}(x, u, v)\} \\
\overline{A} &= \{x; \exists u, v : D_u \subseteq B \ \& \ D_v \subseteq \overline{B} \ \& \ R_{\overline{A} \in \text{RS}(B)}(x, u, v)\} \\
B &= \{x; \exists u, v : D_u \subseteq C \ \& \ D_v \subseteq \overline{C} \ \& \ R_{B \in \text{RS}(C)}(x, u, v)\} \\
\overline{B} &= \{x; \exists u, v : D_u \subseteq C \ \& \ D_v \subseteq \overline{C} \ \& \ R_{\overline{B} \in \text{RS}(C)}(x, u, v)\}
\end{aligned}$$

Nyní upravujeme výraz $D_u \subseteq B$, tak abychom tento vztah vyjádřili pomocí relace $R_{B \in C}$:

$$\begin{aligned}
D_u \subseteq B &\Leftrightarrow (\forall x \leq u : x \in D_u \Rightarrow x \in B) \\
x \in B &\Leftrightarrow \exists u, v : D_u \subseteq C \ \& \ D_v \subseteq \overline{C} \ \& \ R_{B \in C}(x, u, v) \\
D_u \subseteq B &\Leftrightarrow (\forall x \leq u : x \in D_u \Rightarrow \exists u_x, v_x : D_{u_x} \subseteq C \ \& \ D_{v_x} \subseteq \overline{C} \ \& \\
&\hspace{15em} \& \ R_{B \in \text{RS}(C)}(x, u_x, v_x))
\end{aligned}$$

Nyní přepíšme pravou stranu (uzávorkovanou podformulí) poslední formule do vhodného tvaru. Při tomto přepisu uvažujeme „sumu množiny množin svědků“, která je samozřejmě konečná (má svůj kód) a kterou označme jako u_{\cup} (resp. v_{\cup}):

$$\begin{aligned}
\exists u_{\cup}, v_{\cup} : D_{u_{\cup}} \subseteq C \ \& \ D_{v_{\cup}} \subseteq \overline{C} \ \& \\
&\hspace{10em} \& \ \forall x \leq u : (x \in D_u \Rightarrow \exists u_x, v_x : (D_{u_x} \subseteq D_{u_{\cup}} \ \& \\
&\hspace{15em} \& \ D_{v_x} \subseteq D_{v_{\cup}} \ \& \ R_{B \in \text{RS}(C)}(x, u_x, v_x)))
\end{aligned}$$

S pomocí předchozího vztahu zavedme podmínku ϕ_B „dovodující“ $D_u \subseteq B$:

$$\begin{aligned}
\phi_B(u, u_{\cup}, v_{\cup}) &\Leftrightarrow \forall x \leq u : (x \in D_u \Rightarrow \exists u_x, v_x : D_{u_x} \subseteq D_{u_{\cup}} \ \& \\
&\hspace{15em} \& \ D_{v_x} \subseteq D_{v_{\cup}} \ \& \ R_{B \in \text{RS}(C)}(x, u_x, v_x))
\end{aligned}$$

Naprostu analogicky můžeme upravovat výraz $D_v \in \overline{B}$ a výslednou podmínku „dovodující“ $D_u \in \overline{B}$ označme jako $\phi_{\overline{B}}$. Přesný význam těchto podmínek je následující:

$$\begin{aligned}
D_u \subseteq B &\Leftrightarrow \exists u_{\cup}, v_{\cup} : D_{u_{\cup}} \subseteq C \ \& \ D_{v_{\cup}} \subseteq \overline{C} \ \& \ \phi_B(u, u_{\cup}, v_{\cup}) \\
D_u \subseteq \overline{B} &\Leftrightarrow \exists u_{\cup}, v_{\cup} : D_{u_{\cup}} \subseteq C \ \& \ D_{v_{\cup}} \subseteq \overline{C} \ \& \ \phi_{\overline{B}}(u, u_{\cup}, v_{\cup}) \\
\forall \tilde{u}_{\cup} \subseteq u_{\cup}, \tilde{v}_{\cup} \subseteq v_{\cup} : &(\phi_B(u, \tilde{u}_{\cup}, \tilde{v}_{\cup}) \Rightarrow \phi_B(u, u_{\cup}, v_{\cup})) \\
\forall \tilde{u}_{\cup} \subseteq u_{\cup}, \tilde{v}_{\cup} \subseteq v_{\cup} : &(\phi_{\overline{B}}(u, \tilde{u}_{\cup}, \tilde{v}_{\cup}) \Rightarrow \phi_{\overline{B}}(u, u_{\cup}, v_{\cup}))
\end{aligned}$$

Protože relace $\phi_{\overline{B}}$ a ϕ_B jsou rekurzivně spočetné, můžeme nyní již můžeme napsat množinu A ve smyslu podmínky $*$ pro $A \in \text{RS}(C)$:

$$A = \{x; \exists u, v : D_u \subseteq C \ \& \ D_v \subseteq \overline{C} \ \& \ (\exists u_B, u_{\overline{B}} : \phi_B(u_B, u, v) \ \& \ \phi_{\overline{B}}(u_{\overline{B}}, u, v) \ \& \ R_{A \in \text{RS}(B)}(x, u_B, u_{\overline{B}}))\}.$$

Tuto poměrně nepřehlednou rovnici, která je hledanou relací $*$, nyní okomentujme:

- množiny D_{u_B}, D_{v_B} jsou „svědci“ $x \in A$,
- proměnné u, v jsou kódy sum „množin svědků“ („svědci“ pro x jsou množiny $u_B, u_{\overline{B}}$),
- podmínka $\phi_B(u_B, u, v)$ „dosvědčuje“ $D_{u_B} \subseteq B$,
- podobná tvrzení platí i pro v a $\phi_{\overline{B}}(u_{\overline{B}}, u, v)$,
- $R_{A \in \text{RS}(B)}(x, u_B, v_{\overline{B}})$ „dosvědčuje“ $x \in A$.

Naprosto schodným postupem se dokáže platnost $\overline{A} \in \text{RS}(B)$. Nyní si stačí uvědomit definici \leq_T -převoditelnosti. Q. E. D.

4 Operace skoku

4.1 Definice skoku

Operace skoku je relativizací konstrukce množiny K z množiny \emptyset . Motivací k zavedení operace skoku ukazuje následující úvaha o vlastnostech množiny K . Pro úplnost zopakujme její definici.

Definice 12. *Množina K a problém zastavení*

$$K = \{x; x \in W_x\}$$

Problém zastavení je úloha „ $x \in K$ “. ■

Je známo, že \bar{K} není rekurzivně spočetná; naopak množina K je rekurzivně spočetná. Množinu K jsme získali vydělením velmi jednoduché množiny, přesto však množina \bar{K} je evidentně složitější. Podíváme-li se na podmínku, která určuje množinu \bar{K} ($\{x; x \in \bar{W}_x\}$), je zřejmé, že způsob konstrukce vylučuje existenci rekurzivně spočetné metody výpočtu. Pokusme se nyní uvedenou konstrukci zobecnit a tím získat operaci skoku.

Meritem konstrukce bude zobecnění výrazu W_x , který vypovídá o výpočtech na Turingově stroji (resp. rekurzivní funkce) s kódem x , na výraz W_x^A , který bude vypovídat o výpočtech na určitém Turingově stroji s orákulem množiny A . K naplnění tohoto programu potřebujeme rozšířit prostředky používané ke kódování; při analýze definice uvedené v kapitole „Neformální definice turingovské převeditelnosti pomocí Turingových strojů“ Turingova stroje s orákulem množiny A se ukáže, že potřebujeme „dokódovat“:

- nejvýše tři nové znaky abecedy,
- jeden vnitřní stav (v podstatě položení otázky na náležením do A).

Požadované kódování je možno vybudovat snadným rozšířením některého z kódování uvedených např. v pracích [2], [4] nebo [7].

Idea definice 13. *Rozšíření kódování* Mějme nějaké „rozumné kódování“ formalizující Turingovy stroje s orákulem množiny A . Turingův predikát pro výpočet Turingovým strojem s orákulem množiny A označme T^A ,

podobným způsobem definujeme W_x^A (resp. pro více argumentů $W_x^{(k),A}$) jako příslušné zobecnění množiny W_x (resp. $W_x^{(k)}$). Tato „rozumná kódování“ jsou na sebe vzájemně \leq_m -převoditelná. ■

Takto zobecněný Turingův predikát není rekurzivní, protože není rekurzivní podmínka $x \in A$. Nechť je splněno $T^A(x, y, w)$, pak výpočet w „obsahuje“ otázky tvaru $t_1 \in A, t_2 \in A, t_3 \in A \dots t_n \in A$, kde $t_1, t_2, t_3 \dots t_n$ jsou termy. Samozřejmě existují u, v , že $D_u \subseteq A, D_v \subseteq \bar{A}$ a je splněno $\{t_1, t_2 \dots t_n\} \in (D_u \cup D_v)$. Toto pozorování ukazuje, že pro $\exists w : T(x, y, w)$ lze rekurzivním výpočtem odvodit ekvivalentní podmínku tvaru:

$$\exists u, v : D_u \subseteq A \ \& \ D_v \subseteq \bar{A} \ \& \ (\exists w : R_{x,y}(w, u, v)),$$

kde $R_{x,y} \in \Delta_0$ a každá podformule $R_{x,y}$ tvaru $t \in A$ je shora omezená; predikát T^A je tedy rekurzivně spočetný v množině A . Výše uvedená podmínka je podobná podmínce *; to nás přivádí k nápadu definovat skok nahrazením v podmínce * rekurzivně spočetnou relaci podmínkou náležení do Σ_1 -kompletní množiny.

Definice 14. Skok množiny Skok množiny A (symbolicky $\text{jump}(A)$ nebo také A') je definován jako:

$$\text{jump}(A) = \{x; \exists u, v (D_u \subseteq A \ \& \ D_v \subseteq \bar{A} \ \& \ \langle x, u, v \rangle \in W_x)\}. \quad \blacksquare$$

Podle odstavce předcházející definici skoku můžeme vlastně skok množiny A považovat (při vhodně zvoleném kódování) za množinu $\{x; x \in W_x^A\}$. Tato vhodná volba kódování „využívá“ výše naznačené úpravy Turingova predikátu — každému Turingovu stroji s orákulem lze rekurzivní funkcí přiřadit odpovídající Turingův predikát, který lze rekurzivní funkcí „přepsat“ do vhodného tvaru.

Definice 15. Vícenásobný skok množiny \emptyset Třídou $\emptyset^{(n)}$ definujeme s pomocí rekurze $\begin{cases} \emptyset^{(0)} & = \emptyset \\ \emptyset^{(n+1)} & = \text{jump}(\emptyset^{(n)}) \end{cases}$. ■

Neformálně řečeno $\emptyset^{(n)}$ je třída vzniklá n -násobnou akcí skoku na prázdnou množinu.

4.2 Skok, relace RS a aritmetická hierarchie

Věta 9. Rekurzivní spočetnost a \leq_m -převeditelnost Množina A náleží $RS(B)$, právě když $A \leq_m \text{jump}(B)$. \square

Důkaz: Dokažme oba směry ekvivalence. Pro každou rekurzivní funkci f je relace $\langle f(x), u, v \rangle \in W_{f(x)}$ samozřejmě rekurzivně spočetná a proto dosvědčuje $A \in RS(B)$; tím je dokázána implikace zprava doleva. Nyní dokažme opačnou implikaci.

Označme f rekurzivní funkci, která pro vstupní argument x vygeneruje kód funkce, která:

- interpretuje svou jedinou vstupní proměnou jako uspořádanou trojici (označme ji třeba $\langle u_1; u_2; u_3 \rangle$),
- a následně konverguje, když $R(x; u_2; u_3)$.

Uvedenou funkci f lze sestrojít tak, že $f(x)$ pokládáme rovnou funkci:

$$\langle u_1; u_2; u_3 \rangle \mapsto \mu w : T(R; (x; u_2; u_3); w).$$

Z vlastností Turingova predikátu plyne:

$$R(x; u_2; u_3) \Leftrightarrow \langle f(x); u_2; u_3 \rangle \in W_{f(x)}.$$

Nyní oslabeme předchozí vztah.

$$(D_u \subseteq B \ \& \ D_v \subseteq \overline{B}) \Rightarrow (R(x; u; v) \Leftrightarrow \langle f(x); u; v \rangle \in W_{f(x)}).$$

Z oslabeného tvrzení a následujících úvah plyne dokazovaná implikace.

$$\begin{aligned} A &= \{x; \exists u, v : D_u \subseteq B \ \& \ D_v \subseteq \overline{B} \ \& \ R(x, u, v)\} \\ x \in A &\Leftrightarrow \exists u, v : D_u \subseteq B \ \& \ D_v \subseteq \overline{B} \ \& \ R(x, u, v) \\ x \in A &\Leftrightarrow \exists u, v : D_u \subseteq B \ \& \ D_v \subseteq \overline{B} \ \& \ \langle f(x); u; v \rangle \in W_{f(x)} \\ \text{jump}(B) &= \{x; \exists u, v : D_u \subseteq B \ \& \ D_v \subseteq \overline{B} \ \& \ \langle x, u, v \rangle \in W_x\} \\ x \in A &\Leftrightarrow f(x) \in \text{jump}(B) \quad \boxed{\text{Q.E.D}} \end{aligned}$$

Příklad 4. Dokažte $\exists f \forall A : K \leq_m \text{jump}(A)$ via f .⁴ \square

⁴**Návod:** Postupujte podobně jako v předchozí matematické větě.

Věta 10. rekurzivní spočetnost skoku množiny v množině Mezi množinami $\text{jump}(A)$ a A jsou tyto vztahy:

1. množina $\text{jump}(A)$ je rekurzivně spočetná v množině A ,
2. naproti tomu množina $\overline{\text{jump}(A)}$ není rekurzivně spočetná v množině A ,
3. platí $\text{jump}(A) \not\leq_T A$.

□

Důkaz: K důkazu prvního bodu stačí vzít v úvahu definici množiny $\text{jump}(A)$ a uvědomit si, že $R(x, u, v) \Leftrightarrow \langle x, u, v \rangle \in W_x$ je rekurzivně spočetná relace. Třetí bod bezprostředně vyplývá z druhého bodu, který lze snadno dokázat s pomocí diagonálního lemmatu.

(Přesněji : Druhé tvrzení je podle předchozí matematické věty ekvivalentní s $\text{jump}(A) \not\leq_m \overline{\text{jump}(A)}$. Uvažujme relaci R , která při vstupu $\langle x; u; v \rangle$ je splněna právě když, $\langle f(x); u; v \rangle \in W_{f(x)}$. Předpoklad, že f převádí $\text{jump}(A)$ a $\overline{\text{jump}(A)}$ implikuje, že \overline{R} nepatří do ani $\text{jump}(A)$ do $\overline{\text{jump}(A)}$; přesně tak jako v obvyklém — s využitím diagonálního lemmatu — důkazu obdobného tvrzení pro K.) Q.E.D.

Předchozí výsledky předznamenávají, že operace jump zvyšuje složitost množiny. Bod dva předchozí matematické věty ukazuje, že nedochází ke kolapsu „zobecněné aritmetické hierarchie“. V závěru kapitoly bude ukázáno, že operace jump generuje „posunutí o jedničku“ v aritmetické hierarchii a aritmetická hierarchie bude charakterizována množinami $\emptyset^{(n)}$.

Všimněme si ještě, že dosavadní výsledky měly obecnější charakter — týkaly se i nearitmetických množin.

Lemma 11. Aritmetická hierarchie Platí:

$$A \in \text{RS}(\emptyset^{(n)}) \Rightarrow A \in \Sigma_{n+1}$$

□

Důkaz : Nejprve se zabývejme případem $n = 0$, tj. $A \in \text{RS}(\emptyset) \Rightarrow A \in \Sigma_1$. Tato implikace již byla dříve dokázána v prvním příkladě.

Nyní dokazujeme indukci. Nechť implikace platí pro všechna $n \leq m$. Zkoumejme podmínky uvedené v definici *:

- $D_u \subseteq \emptyset^{(m)}$ tato podmínka je podle indukčního předpokladu třídy Σ_m .
- $D_v \subseteq \overline{\emptyset^{(m)}}$ tato podmínka je podle indukčního předpokladu třídy a vlastností aritmetické hierarchie Π_m .
- $R(x, u, v)$ je z definice třídy RS, což je třída Σ_1 .
- $D_u \subseteq \emptyset^{(m)}$ & $D_v \subseteq \overline{\emptyset^{(m)}}$ je díky předchozím bodům a vlastnostem aritmetické hierarchie třídy Σ_{n+1} .

Celá podmínka * je třídy $\Sigma_{\max\{(1), (n+1)\}} = \Sigma_{(n+1)}$. Důkazem indukčního kroku je zároveň dokončením důkazu celé věty. Q.E.D

Lemma 12. Aritmetická hierarchie Platí:

$$A \in \text{RS}(\emptyset^{(n)}) \Leftrightarrow A \in \Sigma_{n+1}$$

□

Důkaz : Nejprve se zabýváme případem $n = 0$, tj. $A \in \text{RS}(\emptyset) \Leftrightarrow A \in \Sigma_1$. Tato implikace již byla dříve dokázána.

Nyní pokračujeme v důkazu indukcí; necht' je tvrzení splněno pro všechna $m \leq n + 1$. Z vlastností aritmetické hierarchie vyplývá, že každá množina z třídy $\Sigma_{(n+2)}$ se dá vyjádřit ve tvaru $\{x; \exists y : \langle x, y \rangle \in \overline{A}\}$, kde A je z třídy $\Sigma_{(n+1)}$. Z indukčního předpokladu vyplývá $A \in \Sigma_{n+1} \Rightarrow A \in \text{RS}(\emptyset^{(n)})$.

$$\begin{aligned} A \in \text{RS}(\emptyset^{(n)}) &\Leftrightarrow A \leq_m \text{jump}(\emptyset^{(n)}) \Leftrightarrow A \leq_m \emptyset^{(n+1)} \\ &A \leq_m \emptyset^{(n+1)} \text{ via } f \\ &(\text{resp. } \overline{A} \leq_m \overline{\emptyset^{(n+1)}} \text{ via } f) \end{aligned}$$

Hledaná rekurzivně spočetná relace „dosvědčující“ rekurzivní spočetnost $\{x; \exists y : \langle x, y \rangle \in \overline{A}\}$ v množině $\emptyset^{(n+1)}$ je $\exists y, z : (f(y) \in D_v \ \& \ \langle x, z \rangle = y)$; podmínka $f(y) \in D_v \subseteq \overline{\emptyset^{(n+1)}}$ totiž zaručuje $y \in \overline{A}$. Tím je důkaz dokončen.

Q.E.D

Věta 13. Aritmetická hierarchie Platí:

$$A \in \text{RS}(\emptyset^{(n)}) \Leftrightarrow A \in \Sigma_{n+1} \quad \square$$

Důkaz : Obě implikace byly dokázány v předchozích lematech. Q.E.D

Tím byla dokázána slíbená charakterizace aritmetické hierarchie množinami $\emptyset^{(n)}$.

5 Dosažené výsledky

Na závěr práce zopakujeme nejzásadnější tvrzení:

Věta 14. *Platí :*

1. turingovská převeditelnost je reflexivní a tranzitivní relace,
2. relace rekurzivní spočtenosti v množině je reflexivní,
3. relace rekurzivní spočtenosti v množině není tranzitivní,
4. $A \in \Sigma_{n+1} \Leftrightarrow A \in \text{RS}(\emptyset^{(n)})$,
5. platí $A \in \text{RS}(B) \Leftrightarrow A \leq_m \text{jump}(B)$,
6. $A \in \text{RS}(B) \Leftrightarrow A \in \text{RS}(\overline{B})$,
7. $A \in \text{OR} \Leftrightarrow \text{RS} = \text{RS}(A)$,
8. třída $\text{RS}(A)$ je uzavřena na průnik, sjednocení, existenční kvantifikaci a omezenou univerzální kvantifikaci,
9. třída OR je stupněm \leq_T -převeditelnosti,
10. $A \leq_m B \Rightarrow A \leq_T B$.

Dále neplatí $A \in \text{RS} \Rightarrow A \leq_T B$, ale naopak platí $A \in \text{RS} \Leftarrow A \leq_T B$.
Dále neplatí tvrzení $A \leq_T B \Rightarrow A \leq_m B$. \square

Důkaz : Důkazy všech očíslovaných tvrzení jsou uvedeny v předchozím textu. Uvážíme-li definici turingovské převeditelnosti okamžitě dostáváme $A \leq_T B \Rightarrow A \in \text{RS}(B)$. Uvážíme-li navíc, že turingovská převeditelnost je tranzitivní a rekurzivní spočtenost v množině není tranzitivní, okamžitě dostaneme i $\neg(A \in \text{RS} \Rightarrow A \leq_T B)$. Množiny K a \overline{K} jsou \leq_T -převeditelné, ale nejsou \leq_m -převeditelné. Proto neplatí $A \leq_T B \Rightarrow A \leq_m B$. Q.E.D

RS není pro \leq_T -převeditelnost stupeň převeditelnosti; podle FM věty v RS dokonce existují nesrovnatelné množiny vůči \leq_T -převeditelnosti.

Dodatky

A Ekvivalence obou definic turingovské převeditelnosti

Tento dodatek především shrnuje myšlenky uvedené ve vlastním textu. Ekvivalencí definic se samozřejmě míní ve smyslu následujícího náznaku věty.

Náznak věty 15. *Množina A převeditelná na B podle definice turingovské převeditelnosti s pomocí turingových strojů (viz podkapitola „Neformální definice turingovské převeditelnosti s pomocí Turingových strojů“), právě tehdy a jen tehdy platí-li $A \leq_T B$ podle Smoryňského definice (viz podkapitola „Rekurzivnost v množině a turingovská převeditelnost“).*

Náznak důkazu: Zbytek tohoto dodatku je již věnován základnímu načrtnutí myšlenky důkazu této ekvivalence. Zabývejme se nejprve implikací zleva doprava (první bod následujícího seznamu) a později i druhou implikací (druhý bod následujícího seznamu).

1. Turingův stroj při konkrétním konvergentním výpočtu projde jen konečným počtem stavů a proto nutně se „zeptá“ orákula jen konečněkrát. Důsledkem je, že výsledek výpočtu je determinován pouze konečnou množinou odpovědí. Jinými slovy stačí vědět jen, že určitá konečná množina je podmnožinou převáděné množiny (resp. jejího doplňku). Přesně touž funkci plní v definici * tučně vyznačená podformule.

Posloupnost stavů Turingova stroje s orákulem lze evidentně kódovat přirozeným číslem. Rovněž zřejmě rozhodnutí zda daný kód je výpočtem Turingova stroje s orákulem je rekurzivní úlohou. Ústředním momentem je nalezení příslušné rekurzivně spočetné relace. Mějme relaci, která zjišťuje zda existuje číslo x :

- x je kódem výpočtu Turingova stroje s orákulem
- množina čísel, na které se Turingův stroj „dotáže“ orákula během tohoto výpočtu, je podmnožinou $D_u \cup D_v$

- odpovědi orákula v tomto výpočtu jsou „správné“; což se zjistí pomocí rekurzivní podmínky $x \in D_u$ (resp. $x \in D_v$)

Evidentně existuje rekurzivní relace s těmito vlastnostmi. Jedna z hledaných relací je existenční kvantifikací této rekurzivní relace a je proto rekurzivně spočetná. Z existence této relace a z definice * přímo vyplývá, že $B \in \text{RS}(A)$. Protože úlohu řeší — nikoli jen přijímá — Turingův stroj, lze tedy obdobným způsobem dokázat i $B \in \text{RS}(\bar{A})$. Tím jsou doloženy obě definice figurující v definici turingovské převeditelnosti. V této chvíli je dokončen náznak důkazu prvního směru implikace.

2. Předpoklad je $B \in \text{RS}(A)$ & $\bar{B} \in \text{RS}(A)$; příslušné rekurzivně spočetné funkce v definici * označme R_B a $R_{\bar{B}}$.

Každé číslo x lze pomocí Turingova stroje interpretovat jako uspořádanou dvojici $\langle (x)_1, (x)_2 \rangle$ a při „opakované“ interpretaci můžeme číslo interpretovat jako uspořádanou trojici $\langle ((x)_1)_1, ((x)_1)_2, (x)_2 \rangle$. Hledaný Turingův stroj s orákulem pracuje při řešení úlohy $x \in B$ následujícím způsobem:

- 1 Přiřaď proměnné I hodnotu 0.
- 2 Nastav I_1, I_2, I_3 , aby $I = \langle I_1, I_2, I_3 \rangle$.
- 3 Jestliže I_1 není kód podmnožiny A (ověř pro všechna $x \leq I_1$ platnost $x \in D_{I_1} \Rightarrow x \in A$), skoč na krok **6**.
- 4 Jestliže I_2 není kód podmnožiny \bar{A} , skoč na krok **6**.
- 5 Jestliže I_3 je kód výpočtu $R_B(x, I_1, I_2)$ vypiš na terminál „ $x \in B$ “ a skonči.
- 5 Jestliže I_3 je kód výpočtu $R_{\bar{B}}(x, I_1, I_2)$ vypiš na terminál „ $x \notin B$ “ a skonči.
- 6 Přiřaď I hodnotu $I + 1$.
- 7 Skoč na krok **2**.

Uvedený Turingův stroj s orákulem množiny A očividně řeší úlohu $x \in B$. Tím se podařilo dokázat i druhou implikaci a tedy i ekvivalenci obou definic.

Q.E.D.

B Kódování množin

Cílem tohoto dodatku je ukázat, že konkrétní realizace kódování množin nemusí být složité a neintuitivní. V tomto dodatku jsou používány základní definice a obecně známé poznatky z teorie čísel. Uvádění důkazů bylo v tomto dodatku pominuto, protože všechna tvrzení lze jednoduše dokázat indukcí.

Definice 16. *Uspořádaná dvojice a trojice Uspořádaná dvojice: Číslo x je uspořádaná dvojice $\langle x_1; x_2 \rangle$, právě když:*

$$2 * x = (x_1 + x_2) * (x_1 + x_2 + 1) + 2 * x_1.$$

Funkce provádějící uvedené kódování je párovací funkce. Trojice $\langle x, y, z \rangle$ je číslo $\langle x, \langle y, z \rangle \rangle$. ■

Definice 17. *Kartézský součin Kartézský součin $A \times B$ množin A a B definujeme jako:*

$$\langle x; y \rangle \in A \times B \Leftrightarrow (x \in A \ \& \ y \in B). \quad \blacksquare$$

Chápání $\langle x; y \rangle$ podle [1] jako kódu množiny $\{\{D_x\}; \{\{D_x\}; \{D_y\}\}$ by další výklad zbytečně komplikovalo. Následující lemma uvádí požadavky na kódování, které postačují k provedení všech konstrukcí v této práci.

Lemma 16. *Kódování konečných množin přirozených čísel Existuje (primitivně) rekurzivní relace R , která definuje systém konečných množin D_u (kde u probíhá celou množinu přirozených čísel) a platí:*

1. $D_u = \{x; R(x, u)\}$,
2. $\text{Fin}(A) \Rightarrow \exists u : D_u = A$,
3. $\forall u : \text{Fin}(D_u)$,
4. $\forall x \in D_u : x \leq u$.

□

Požadavky kladené na kódující funkci by šlo značně rozšířit například o podmínku $D_u = D_v \Rightarrow u = v$ (prosté kódování); tato rozšíření jsou však zde nepodstatná.

Příklad 5. Kódování

A Zjistěte, které množiny jsou následujícím kódováním kódovány čísla 0, 8, 29 a 1283.

$$(x \in D_u) \Leftrightarrow (\exists y : u = y \bmod 2^{(x+1)} \ \& \ 2^x \leq y)$$

B Zjistěte, která množina je následujícím kódováním kódována číslem 80864.

$$(x \in D_{(u_1; u_2)}) \Leftrightarrow (\exists y < u_1 : \text{prvočíslo}(y) \ \& \ y|u_1 \ \& \ x = u_2 \bmod y)$$

C Ověřte, že kódování z bodů A a B splňují podmínky předchozího lemmatu. Které další podmínky tato kódování splňují? \square

Řešení : Nejdříve se zabýváme bodem A.

$$\begin{array}{ll} 8 = 2^3 = & 100_2 \mapsto \{3\} \\ 29 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^0 = & 11101_2 \mapsto \{4, 3, 2, 0\} \\ 1283 = 2^{10} + 2^8 + 2^1 + 2^0 = & 10100000011_2 \mapsto \{10, 8, 1, 0\} \\ 0 = 0 = & 0_2 \mapsto \emptyset \end{array}$$

Zabýváme se nyní bodem B.

$$80864 = \langle 246; 37 \rangle = \langle 41.3.2; 37 \rangle$$

$$37 = 37 \bmod 41$$

$$37 = 1 \bmod 3$$

$$37 = 1 \bmod 2$$

$$D_{80864} = \{37; 1\}$$

C. Důkaz splnění podmínek u bodu A se provádí indukcí u bodu B pak s pomocí Čínské zbytkové věty a neomezenosti množiny prvočísel.

Kódování z bodu A je například prosté, každé číslo je kódem množiny a $u \leq 2^{(\max(D_u)+1)}$. Kódování z bodu B není prosté, ale přesto každé číslo je kódem množiny. \checkmark

Kódování v B je inspirováno kódováním z práce [7], které je blízké kódování Gödelovu (Shoenfeldovu) popsáném v [5]. Poznamenáme, že tímto způsobem lze interpretovat teorii konečných množin v Peanově aritmetice.

Z předchozího lemmatu máme v aritmetice interpretovaný jediný symbol jazyka teorie množin („ \in “). Zkoumejme z hlediska aritmetické hierarchie interpretace ostatních množinových relací.

$$\begin{aligned}
x \in D_u &\Leftrightarrow R(x, u) \\
D_u \subseteq D_v &\Leftrightarrow \forall x : (x \in D_u \Rightarrow x \in D_v) \\
D_u = D_v &\Leftrightarrow (D_u \subseteq D_v \ \& \ D_v \subseteq D_u) \\
D_u \subset D_v &\Leftrightarrow \forall x : (D_u \subseteq D_v \ \& \ \neg(D_v \subseteq D_u)) \\
x \in (D_u \cap D_v) &\Leftrightarrow (x \in D_u \ \& \ x \in D_v) \\
x \in (D_u \cup D_v) &\Leftrightarrow (x \in D_u \vee x \in D_v)
\end{aligned}$$

K definici interpretace „množinového“ symbolu „ $=$ “ je užít axiom extenzionality:

$$\begin{aligned}
D_u = D_v &\Leftrightarrow \forall x : (x \in D_u \Leftrightarrow x \in D_v) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \forall x : ((x \in D_u \Rightarrow x \in D_v) \ \& \ (x \in D_v \Rightarrow x \in D_u)) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow D_u \subseteq D_v \ \& \ D_v \subseteq D_u.
\end{aligned}$$

V teorii množin je často velmi výhodné považovat logický symbol „ $=$ “ za relaci zavedenou axiomem extenzionality. V této práci je symbol „ $=$ “ používán v třech různých významech:

- jako logický symbol (např. $x = f(y)$),
- jako prostředek zápisu vztahů mezi kódovanými množinami (resp. aritmetických vztahů; konkrétně podmínka $D_u = D_v$ vyjadřuje vztah mezi proměnnými u a v — platnost podmínky $\forall x : R(x, u) \Leftrightarrow R(x, v)$),
- jako vyjádření vztahu mezi množinami v intuitivním smyslu (například $\bar{\emptyset} = \{x; \phi(x)\}$ nebo $\overline{(A \times A)} = (A \times A) \cup (\bar{A} \times \bar{A}) \cup (\bar{A} \times A)$).

Ostatní množinové symboly jsou používány samozřejmě jen v posledních dvou významech.

Nyní využijme omezené kvantifikace (viz čtvrtý bod předchozího lemmatu), která zlepší odhad složitosti uvedených formulí z Π_1 na Δ_0 :

$$D_u \subseteq D_v \Leftrightarrow \forall \mathbf{x} \leq \mathbf{u} : (x \in D_u \Rightarrow x \in D_v).$$

Předchozí úvahy ukazují, že formule obsahující pouze $D_u, D_v \dots$, logické symboly, vyjma kvantifikátorů, a „množinové“ symboly „ $=, \in, \subseteq, \cup, \cap$ “ jsou „zkratky“ Δ_0 formulí v jazyce aritmetiky. Tato pozorování byla bez upozornění využívána k zpřehlednění zápisu některých formulí — především konkrétních voleb rekurzivně spočtené relace z definice $*$.

U kódování uvedených v předcházejícím příkladu by šlo uvedenou úvahu zesílit — pro sjednocení (resp. pro jakoukoli z uvažovaných funkcí) lze totiž nálezt rekurzivní funkci f splňující:

$$D_{f(u,v)} = D_u \cup D_v.$$

Na závěr tohoto doplňku uveďme slíbený důkaz korektnosti definice $*$.

Důkaz korektnosti definice: Mějme dvě relace ϕ_1, ϕ_2 splňující podmínky kladené předchozím lemmatem na kódující funkci. Systém množin kódovaný ϕ_1 (resp. ϕ_2) označme, z důvodů odlišení, jako $\{D_u^{\phi_1}; u \in N\}$ (resp. $\{D_u^{\phi_2}; u \in N\}$). Nechtě mezi A, B a R při kódování určeným relací ϕ_1 je splněna podmínka $*$. Z definice kódování vyplývá $\forall u_1 \exists u_2 : D_{u_1}^{\phi_1} = D_{u_2}^{\phi_2}$ a $\forall u_2 \exists u_1 : D_{u_1}^{\phi_1} = D_{u_2}^{\phi_2}$. Napišme podmínku ekvivalentní s podmínkou $*$, která bude rovněž ve „tvaru“ $*$. Jednou (resp. dvakrát) podtržená část formule odpovídá rekurzivně spočtené funkci v definici $*$ (resp. přechodu $u \mapsto u_1, v \mapsto v_1$ mezi způsobem kódování s užitím ϕ_2 a ϕ_1).

$$x \in B \Leftrightarrow \exists u \exists v : \underbrace{D_u^{\phi_2}}_{D_u^{\phi_2} = D_{u_1}^{\phi_1}} \subseteq A \ \& \ \underbrace{D_v^{\phi_2}}_{D_v^{\phi_2} = D_{v_1}^{\phi_1}} \subseteq \bar{A} \ \& \ \underline{\underline{\exists u_1, v_1 : (D_{u_1}^{\phi_1} = D_{u_1}^{\phi_2} \ \& \ D_{v_1}^{\phi_1} = D_{v_1}^{\phi_2} \ \& \ R(x, u_1, v_1))}}$$

Tato formule je hledanou podmínkou $*$ pro kódování ϕ_2 . Můžeme totiž provést omezení složitosti $(\exists u_1, v_1 : D_{u_1}^{\phi_1} = D_{u_1}^{\phi_2} \ \& \ D_{v_1}^{\phi_1} = D_{v_1}^{\phi_2}) \in \Sigma_1$, které lze snadno zdůvodnit pomocí výše naznačené interpretace „množinového“ symbolu „ $=$ “ v aritmetice.

Protože je podle definice $*$ splněna podmínka $R(x, u_1, v_1) \in \Sigma_1$ a platí i $(\exists u_1, v_1 : D_{u_1}^{\phi_1} = D_{u_1}^{\phi_2} \ \& \ D_{v_1}^{\phi_1} = D_{v_1}^{\phi_2} \ \& \ R(x, u_1, v_1)) \in \Sigma_1$. Splněnost $*$ závisí pouze na volbě množin A a B . Q.E.D

C Seznam literatury a použitého značení

Seznam použitého značení

Následující seznam uvádí výčet matematického značení, při jehož interpretaci by mohly vzniknout obtíže:

\setminus	: množinové mínus
$\langle x_1, x_2, x_3 \dots x_n \rangle$: n -tice čísel
$X \times Y$: kartézský součin dvou množin
\bar{A}	: doplněk množiny
D_u, D_v	: konečné množiny
„ORÁKULUM“	: stavy Turingova stroje
„ANO“, „NE“ ...	: znaky abecedy Turingova stroje
0, 1	: znaky abecedy Turingova stroje
π	: projekce
\emptyset	: prázdná množina
$A', \text{jump}(A)$: skok množiny A
$A^{(n)}$: n -násobný skok A
\vee	: disjunkce
$\&$: konjunkce
$!f(x)$: funkce f konverguje v x
$(x)_1, (x)_2$: $x = \langle (x)_1, (x)_2 \rangle$
FIN	: predikát konečnosti množiny
$ A $: mohutnost množiny A
$T(x, y, z)$: Turingův predikát
T	: Turingův stroj
c_A	: charakteristická funkce množiny A
K	: $\{x; x \in W_x\}$
OR	: rekurzivní funkce

Symbody určené k logickému členění textu:

■	: znak ukončující znění definice
□	: znak ukončující znění matematické věty, lemmatu nebo příkladu
□ Q.E.D.	: znak ukončující znění důkazu
✓	: znak ukončující řešení příkladu
*	: odkaz na definici rekurzivní spočetnosti v množině

Seznam literatury

Reference

- [1] Bohuslav Balcar a Petr Štěpánek. *Teorie množin*. Academia, Praha, 2001.
- [2] Piergiorgio Odifreddi. *Classical Recursion Theory*, svazek 1. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1989.
- [3] Piergiorgio Odifreddi. *Classical Recursion Theory*, svazek 2. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1999.
- [4] Hartley Rogers, Jr. *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*. McGraw-Hill, New York, 1967.
- [5] Joseph R. Shoenfield. *Mathematical Logic*. Addison-Wesley, 1967.
- [6] Craig Smoryński. Nonstandard Models Of Aritmetic, 1987. Poznámky k přednášce (rukopis).
- [7] Vítězslav Švejdar. *Logika: neúplnost, složitost a nutnost*. Academia, Praha, 2002.
- [8] Anna Horská. *Friedberg-Muchnikova věta*. Ročníková práce. Filozofická fakulta Univerzity Karlovy, katedra logiky, 2007.